3/02

क्रमांक 287

H

2017 (I)
गणित विज्ञान
प्रश्न पत्र

4 विषय कोड

B पुस्तिका कोड

समय : 3:00 घंटे

पूर्णांक : 200 अंक

अनुदेश

1. **आपने हिन्दी को माध्यम चुना है ।** इस परीक्षा पुस्तिका में एक सौ बीस (20 भाग 'A' में + 40 भाग 'B' + 60 भाग 'C' में) बहुल विकल्प प्रश्न (MCQ)दिए गए हैं । आपको भाग 'A' में से अधिकतम 15 और भाग 'B' में 25 प्रश्नों तथा भाग 'C' में से 20 प्रश्नों के उत्तर देने हैं । यदि निर्धारित से अधिक प्रश्नों के उत्तर दिए गए तब केवल पहले भाग 'A' से 15, भाग 'B' से 25 तथा भाग 'C' से 20 उत्तरों की जांच की जाएगी ।
2. **ओ.एम.आर.** उत्तर पत्रक अलग से दिया गया है । अपना रोल नम्बर और केन्द्र का नाम लिखने से पहले यह जांच लीजिए कि पुस्तिका में पृष्ठ पूरे और सही हैं तथा कहीं से कटे–फटे नहीं हैं । यदि ऐसा है तो आप इन्विजीलेटर से उसी कोड की पुस्तिका बदलने का निवेदन कर सकते हैं । इसी तरह से **ओ.एम.आर.** उत्तर पत्रक को भी जांच लें । इस पुस्तिका में रफ काम करने के लिए अतिरिक्त पन्ने संलग्न हैं ।
3. **ओ.एम.आर.** उत्तर पत्रक के पृष्ठ 1 में दिए गए स्थान पर अपना रोल नम्बर, नाम तथा इस परीक्षा पुस्तिका का क्रमांक लिखिए, साथ ही अपना हस्ताक्षर भी अवश्य करें ।
4. **आप अपनी ओ.एम.आर. उत्तर पत्रक में रोल नंबर, विषय कोड, पुस्तिका कोड और केन्द्र कोड से संबंधित समुचित वृतों को काले बॉल पेन से अवश्य काला करें। यह एक मात्र परीक्षार्थी की जिम्मेदारी है कि वह ओ.एम.आर.** उत्तर पत्रक **में दिए गए निर्देशों का पूरी सावधानी से पालन करें, ऐसा न करने पर कम्प्यूटर विवरणों का सही तरीके से अकूटित नहीं कर पाएगा, जिससे अंततः आपको हानि, जिससे आपकी ओ.एम.आर.** उत्तर पत्रक **की अस्वीकृति भी शामिल, हो सकती है ।**
5. भाग 'A' में प्रत्येक प्रश्न 2 अंक , भाग 'B' में प्रत्येक प्रश्न के 3 अंक तथा भाग 'C' में प्रत्येक प्रश्न 4.75 अंक का है । प्रत्येक गलत उत्तर का ऋणात्मक मूल्यांकन भाग 'A' में @ 0.5 अंक तथा भाग 'B' में @ 0.75 अंक से किया जाएगा । भाग 'C' के उत्तरों के लिए ऋणात्मक मूल्यांकन नहीं है ।
6. भाग 'A' तथा भाग 'B' के प्रत्येक प्रश्न के नीचे चार विकल्प दिए गए हैं । इनमें से केवल एक विकल्प ही "सही" अथवा "सर्वोत्तम हल" है । आपको प्रत्येक प्रश्न का सही अथवा सर्वोत्तम हल ढूंढना है । भाग 'C' में प्रत्येक प्रश्न का "एक" या "एक से अधिक" विकल्प सही हो सकते हैं । भाग 'C' में प्रत्येक प्रश्न के सभी विकल्पों का सही चयन करने पर ही क्रेडिट प्राप्त होगा ।
7. नकल करते हुए या अनुचित तरीकों का प्रयोग करते हुए पाए जाने वाले परीक्षार्थियों का इस और अन्य भावी परीक्षाओं के लिए अयोग्य ठहराया जा सकता है ।
8. परीक्षार्थी को उत्तर या रफ पन्नों के अतिरिक्त कहीं और कुछ भी नहीं लिखना चाहिए ।
9. केलकूलेटर का उपयोग करने की अनुमति नहीं है ।
10. **परीक्षा समाप्ति पर छिद्र बिन्दु चिन्हित स्थान से OMR उत्तर पत्रक को विभाजित करें। इन्विजीलेटर को मूल OMR उत्तर पत्रक सौंपने के पश्चात आप इसकी कॉर्बनलैस प्रतिलिपि ले जा सकते हैं।**
11. हिन्दी माध्यम/संस्करण के प्रश्न में विसंगति होने/पाये जाने पर अंग्रेजी संस्करण प्रमाणिक होगा ।
12. केवल परीक्षा की पूरी अवधि तक बैठने वाले परीक्षार्थी को ही परीक्षा पुस्तिका साथ ले जाने की अनुमति दी जाएगी ।

रोल नंबर : ....

अभ्यर्थी द्वारा भरी गई जानकारी को मैं सत्यापित करता हूँ ।

नाम : ....

....
इन्विजीलेटर के हस्ताक्षर

FOR ROUGH WORK

भाग \PART 'A'

1. एक वर्ग की भुजा 'a' है। इसमें सबसे बड़ा संभाव्य वृत्त बैठायें और इस वृत्त के अंदर एक सबसे बड़ा संभाव्य वर्ग बैठायें। सबसे अंदर वाले वर्ग की भुजा की लम्बाई क्या है?
   1. $a/_{\pi\sqrt{2}}$
   2. $a/_2$
   3. $\frac{a}{2\sqrt{2}}$
   4. $a/_{\sqrt{2}}$

1. Consider a square of side a. Fit the largest possible circle inside it and the largest possible square inside the circle. What is the side length of the innermost square?
   1. $a/_{\pi\sqrt{2}}$
   2. $a/_2$
   3. $\frac{a}{2\sqrt{2}}$
   4. $a/_{\sqrt{2}}$

2. जब मैं घर से कार्यालय 5 किमी./घंटा की गति से चलकर जाता हूँ तो 8 मिनट देर से कार्यालय पहुंचता हूँ। यदि मैं 8 किमी./घंटा की गति से चलता हूँ तो 5 मिनट देर से पहुँचता हूँ। मेरे घर से कार्यालय कितनी दूर है?
   1. 2 किमी.
   2. 1/3 किमी.
   3. 2/3 किमी.
   4. 1/2 किमी.

2. Walking from my home at a speed of 5 km/h I am 8 minutes late in reaching my office. If I walk at a speed of 8 km/h I reach 5 minutes late. How far is my office from the house?
   1. 2 km
   2. 1/3 km
   3. 2/3 km
   4. 1/2 km

3. A, B और C तीन विभिन्न अंक हैं। यदि इन्हें नीचे दिखाये अनुसार जोड़ा गया है:

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ + & A & B & C \\ + & A & B & C \\ \hline & C & C & C \end{array}$$

तो A, B और C का मान ज्ञात करें
   1. A = 3, B = 4, C = 5
   2. A = 2, B = 3, C = 1
   3. A = 5, B = 1, C = 3
   4. A = 1, B = 8, C = 5

3. A, B and C are three distinct digits. If they are added as below,

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ + & A & B & C \\ + & A & B & C \\ \hline & C & C & C \end{array}$$

find out the value of A, B and C
   1. A = 3, B = 4, C = 5
   2. A = 2, B = 3, C = 1
   3. A = 5, B = 1, C = 3
   4. A = 1, B = 8, C = 5

4. भूमध्य रेखा पर एक कसकर बंधने वाली पट्टी लपेटी गई है। एक दूसरी वृत्ताकार पट्टी जिसकी लंबाई पहली पट्टी की अपेक्षा 15 मी. अधिक है, पहली पट्टी से कुछ ऊँचाई पर स्थित है। व्यक्तियों का एक समूह लंबी पट्टी के नीचे से निकलने की चेष्टा करता है क्या वे इसके नीचे चल पायेंगे? (पृथ्वी की परिधि लगभग 40,000 किमी. है। व्यक्तियों की लंबाई 1 से 2 मीटर के बीच है)
   1. हां
   2. नहीं
   3. ज्ञात नहीं किया जा सकता।
   4. 1.7 मीटर लंबाई से कम वाले व्यक्ति ही।

4. A tight fitting band is wrapped around the Equator. Another circular band whose length is 15 m more lies at a certain height over the first band. A group of human beings attempt to pass under the longer band. Can they walk under it? (Earth's circumference is roughly 40,000 km. The height of human beings is between 1 & 2 m)
   1. Yes
   2. No
   3. Can not be determined
   4. Only those with height less than 1.7 m

5. यदि NET14 एवं NET15 पांच अंकों की ऐसी संख्यायें हैं जिसमें उनका योग = 157229, तब N + E + T कितना होगा?

1. 15	2. 21
3. 25	4. 72

5. If NET14 & NET15 are five digit numbers such that their sum = 157229, then N + E + T would be

1. 15	2. 21
3. 25	4. 72

6. एक बेलनाकार केक को 16 बराबर भागों में काटा जाना है। इसे करने के लिए कम से कम कितनी बार इसे काटा जाये?

1. 9	2. 3
3. 8	4. 5

6. A cylindrical cake is to be cut into 16 equal pieces. What is the minimum number of cuts required to do so?

1. 9	2. 3
3. 8	4. 5

7. '*N*' दो अंकों की एक ऐसी संख्या है जिसके अंकों का गुणनफल जब उनके योग में जोड़ा जाता है तो वह '*N*' के बराबर हो जाता है। '*N*' की इकाई स्थान का अंक होगा

1. 1	2. 7
3. 8	4. 9

7. *N* is a two digit number such that the product of its digits when added to their sum equals *N*. The unit digit of *N* would be

1. 1	2. 7
3. 8	4. 9

8. यदि $P + \frac{1}{Q} = 1$ एवं $Q + \frac{1}{R} = 1$ तब PQR कितना है?

1. -1
2. 2
3. -2
4. ज्ञात नहीं किया जा सकता

8. If $P + \frac{1}{Q} = 1$ and $Q + \frac{1}{R} = 1$, then what is PQR?

1. -1
2. 2
3. -2
4. cannot be calculated

9. जब 3^{256} को 5 से विभाजित किया जाता है तो शेषफल क्या है?

1. 1	2. 2
3. 3	4. 4

9. What is the remainder when 3^{256} is divided by 5?

1. 1	2. 2
3. 3	4. 4

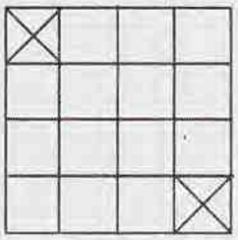
10. यदि 22 कैरट का सोना (मिश्रधातु में भारानुसार 22 भाग सोना तथा 2 भाग तांबा) तथा 24 कैरट का सोना (शुद्ध सोना) समान भार में मिलाकर मिश्रधातु बनायी जाती है, तब मिश्रधातु में भारानुसार तांबे का अनुपात क्या होगा?

1. $\frac{1}{2}$	2. $\frac{1}{8}$
3. $\frac{1}{12}$	4. $\frac{1}{24}$

10. If equal weights of 22 carat gold (alloy of 22 parts gold and 2 parts copper by weight) and 24 carat gold (pure gold) are mixed to form an alloy, what will be the weight proportion of copper in the alloy?

1. $\frac{1}{2}$	2. $\frac{1}{8}$
3. $\frac{1}{12}$	4. $\frac{1}{24}$

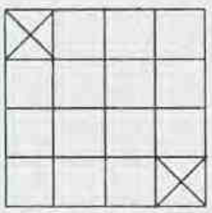
11.



एक $4m \times 4m$ की फर्श को $2m \times 1m$ के टाइल्स से ढका जाना है। दो विकर्णतः विपरीत $1m \times 1m$ आकार के कोने बिना ढके रखने हैं। किसी टाइल को तोड़े बिना और एक दूसरे के ऊपर रखे बिना, कितने टाइल्स की आवश्यकता है?

1. 6
2. 7
3. 8
4. ढकना असंभव है।

11.



A $4m \times 4m$ floor needs to be covered by tiles of size $2m \times 1m$. Two diagonally opposite corners of size $1m \times 1m$ should be left uncovered. How many tiles are required to complete the job without breaking the tiles or overlapping them?

1. 6
2. 7
3. 8
4. Impossible to cover

12. यदि $42 \rightarrow 26,\ 71 \rightarrow 78,\ 33 \rightarrow 16,$
तब $62 \rightarrow$

1. 68	2. 54
3. 38	4. 39

12. If $42 \rightarrow 26,\ 71 \rightarrow 78,\ 33 \rightarrow 16,$
then $62 \rightarrow$

1. 68	2. 54
3. 38	4. 39

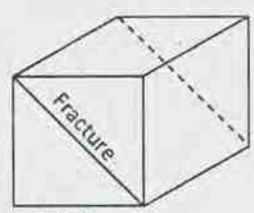
13. एक दूकानदार एक फाइल एवं एक कॉपी Rs 27 में पहले ग्राहक को, एक कॉपी एवं एक पेन Rs 31 में दूसरे ग्राहक को तथा एक पेन एवं एक फाइल Rs 29 में तीसरे ग्राहक को बेचता है, वस्तुओं के मूल्य पूर्ण रूपयों में हैं। निम्न में से कौन-सा अनुमान सही है?

1. तीनों में पेन सबसे महँगा है।
2. तीनों में फाइल सबसे महँगी है।
3. तीनों में कॉपी सबसे महँगी है।
4. दूकानदार ने विभिन्न वस्तुएं विभिन्न ग्राहकों को अलग-अलग मूल्यों पर दूकानदार बेची हैं।

13. A shopkeeper sells a file and a notebook for Rs 27 to the first customer, a notebook and a pen for Rs 31 to the second customer and a pen and file for Rs 29 to the third customer. The prices of the items are rounded in rupees. Which of the following inferences is correct?

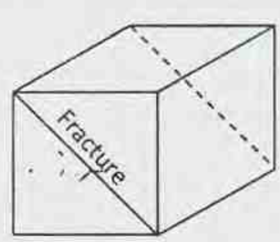
1. The pen is the costliest of the three
2. The file is the costliest of the three
3. The notebook is the costliest of the three
4. The shopkeeper sold the different items to different customers at different rates.

14. एक संगमरमर का घनाकार $(1 \times 1 \times 1\ m^3)$ खण्ड है जिसमें चित्रानुसार समतलीय विभ्रंश है। विभ्रंश को छोड़ते हुए, $20 \times 20 \times 5$ सें.मी.^{3} की अधिकतम कितनी पट्टियां काटी जा सकती हैं?



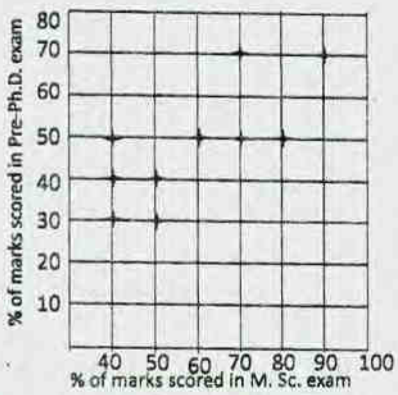
1. 200	2. 300
3. 400	4. 500

14. The diagram shows a cubic block of marble $(1 \times 1 \times 1\ m^3)$ having a planar fracture. What is the maximum number of slabs sized $20 \times 20 \times 5\ cm^3$ that can be cut from this block avoiding the fracture?



1. 200
2. 300
3. 400
4. 500

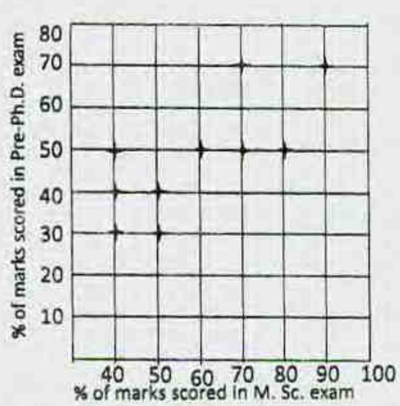
15.



पूर्व-Ph.D. परीक्षा में 10 विद्यार्थियों के प्राप्तांक तथा उनके द्वारा M.Sc.परीक्षा के प्राप्तांकों को ग्राफ में दर्शाया गया है: निम्न में से कौन-सा सत्य है?

1. दो विद्यार्थियों ने पूर्व-Ph.D.परीक्षा में M.Sc. परीक्षा की अपेक्षा बेहतर अंक पाये हैं
2. वे विद्यार्थी जिन्होंने पूर्व-Ph.D. परीक्षा में 50% अंक प्राप्त किये उन्होंने M.Sc. परीक्षा में अधिक प्रतिशत अंक प्राप्त किये हैं
3. दो विद्यार्थियों ने पूर्व-Ph.D. व M.Sc. परीक्षाओं में समान प्रतिशत अंक पाये हैं
4. वह विद्यार्थी जिसके M.Sc. परीक्षा में सर्वाधिक अंक आये सिर्फ उसके ही पूर्व-Ph.D. परीक्षा में भी सर्वाधिक अंक आये हैं

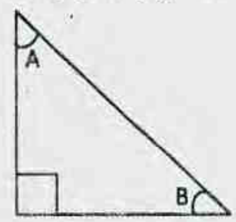
15.



Pre-Ph.D. exam score of 10 students are plotted against their M.Sc. marks. Which of the following is true?

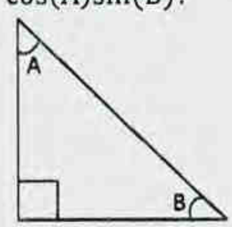
1. Two students have scored better in Pre-Ph.D. than their M.Sc. exam.
2. All those students who scored 50% in Pre-Ph.D, scored more percentage of marks in their M.Sc. exam.
3. Two students scored the same percentage of marks in their Pre-Ph.D. and M.Sc. exams.
4. The student who scored maximum in M.Sc. is the only student to get maximum in Pre-Ph.D. exam

16. दिखाये गये समकोणीय त्रिभुज में $\sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$ का मान क्या है?



1. $-1/_2$
2. 1
3. $+1/_2$
4. -1

16. With reference to the right-angled triangle shown, what is the value of $\sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$?



1. $-1/_2$
2. 1
3. $+1/_2$
4. -1

17. पांच लोगो के एक समूह K, L, M, N और P में L सबसे लंबा व उम्र में सबसे बड़ा है। M , N से बड़ा लेकिन K से ठिगना है। M और P समान उम्र के हैं तथा P, K से लंबा है। N और K समान लंबाई के हैं और K, P से छोटा है। निम्न अनुमानों में से कौन-सा अवश्यंभावी है?

1. P, M से लंबा है
2. N उम्र में सबसे छोटा है
3. N, P से उम्र में बड़ा है
4. N, K से उम्र में बड़ा है

17. L is the tallest and eldest of a group of five people K, L, M, N and P. M is elder to N and shorter than K. M and P are of same age and P is taller than K. N and K are of same height and K is younger to P. Which of the following inferences is certain?
1. P is taller than M
2. N is the youngest
3. N is elder to P
4. N is elder to K

18. तीन क्रमिक धन पूर्णांकों का गुणनफल उनके योग के बराबर है तो उनके वर्गों का योग क्या होगा?
1. 9 2. 14
3. 16 4. 24

18. If the product of three consecutive positive integers is equal to their sum, then what would be the sum of their squares?
1. 9 2. 14
3. 16 4. 24

19. एक लंबे धातु के बेलन को सिरे-से-सिरे तक सुसंहत (चुस्त) रूप से d व्यास की n गोलाकार मोम की गेंदों से भरा जाता है। यदि गेंदें पूर्ण रूप से पिघल जायें तो पिघले हुए मोम का अंश आयतन है
1. d व n दोनों पर निर्भर नहीं
2. d व n दोनों पर निर्भर
3. d पर निर्भर नहीं परंतु n पर निर्भर
4. d पर निर्भर परंतु n पर निर्भर नहीं

19. A tall metal cylinder is filled end-to-end with n snugly fitting spherical wax balls of diameter d. If the balls melt completely, the volume fraction occupied by the melted wax is
1. independent of both d and n
2. dependent on both d and n
3. independent of d, but dependent on n
4. dependent on d, but independent of n

20. कुछ मछुआरों ने कुछ मछलियां पकड़ीं। किसी ने भी 20 से ज्यादा मछलियां नहीं पकड़ीं। a_1 मछुआरों ने आपस में कम से कम एक मछली पकड़ी, a_2 मछुआरों ने आपस में कम से कम दो मछलियां पकड़ीं, इसी तरह a_{20} मछुआरों ने आपस में ठीक 20 मछलियां पकड़ीं। कुल कितनी मछलियां पकड़ी गयीं?
1. $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}$
2. $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 20a_{20}$
3. $20(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20})$
4. $20(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 20a_{20})$

20. Some fishermen caught some fish. No one caught more than 20 fish. a_1 number of fishermen caught at least one fish among them, a_2 number of fishermen caught at least two fish among them, and so on and a_{20} number of fishermen caught exactly 20 fish among them. How many fish were caught?
1. $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}$
2. $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 20a_{20}$
3. $20(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20})$
4. $20(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 20a_{20})$

भाग \PART 'B'

Unit-1

21. मानें कि $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ इससे परिभाषित है:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{यदि } x \neq 0 \\ 1 & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

तो

1. f संतत नहीं है।
2. f संतत है परंतु अवकलनीय नहीं है।
3. f अवकलनीय है।
4. f परिबद्ध नहीं है।

21. Let $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be defined by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

Then

1. f is not continuous
2. f is continuous but not differentiable
3. f is differentiable
4. f is not bounded

22. मानें कि

$A = \{n \in \mathbb{N}: n = 1$ या n के मात्र अभाज्य गुणनखंड 2 या 3 हैं$\}$,

उदाहरणार्थ $6 \in A,\ 10 \notin A$.

मानें कि $S = \sum_{n \in A} \frac{1}{n}$. तो

1. A परिमित है।
2. S एक अपसारी श्रेणी है।
3. $S = 3$
4. $S = 6$

22. Let

$A = \{n \in \mathbb{N}: n =$ 1 or the only prime factors of n are 2 or 3$\}$,

for example, $6 \in A,\ 10 \notin A$.

Let $S = \sum_{n \in A} \frac{1}{n}$. Then

1. A is finite
2. S is a divergent series
3. $S = 3$
4. $S = 6$

23. मानें कि $n \geq 1$ के लिए $f_n(x) = xe^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$. तो अनुक्रम $\{f_n\}$ है

1. $\mathbb{R}$ पर एकसमानत: अभिसारी
2. $\mathbb{R}$ के संहत उपसमुच्चयों के लिए एकसमानत: अभिसारी
3. परिबद्ध तथा $\mathbb{R}$ पर एकसमानत: नहीं अभिसारी
4. अपरिबद्ध फलनों की एक श्रेणी

23. For $n \geq 1$, let $f_n(x) = xe^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Then the sequence $\{f_n\}$ is

1. uniformly convergent on $\mathbb{R}$
2. uniformly convergent only on compact subsets of $\mathbb{R}$
3. bounded and not uniformly convergent on $\mathbb{R}$
4. a sequence of unbounded functions

24. मानें कि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$. तो A के अभिलक्षणिक मान हैं

1. $-4, 3, -3$
2. $4, 3, 1$
3. $4, -4 \pm \sqrt{13}$
4. $4, -2 \pm 2\sqrt{7}$

24. Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$. Then the eigenvalues of A are

1. $-4, 3, -3$
2. $4, 3, 1$
3. $4, -4 \pm \sqrt{13}$
4. $4, -2 \pm 2\sqrt{7}$

25. $L = lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$. तो

1. $L = 0$
2. $L = 1$
3. $0 < L < \infty$
4. $L = \infty$

25. $L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$. Then

1. $L = 0$
2. $L = 1$
3. $0 < L < \infty$
4. $L = \infty$

26. अनुक्रम

$a_n = \left(1 + (-1)^n \frac{1}{n}\right)^n$

पर विचारें। तो

1. $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = 1$
2. $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = e$
3. $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}$
4. $\limsup_{n\to\infty} a_n = e,\ \liminf_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}$

26. Consider the sequence

$a_n = \left(1 + (-1)^n \frac{1}{n}\right)^n$

Then

1. $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = 1$
2. $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = e$
3. $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}$
4. $\limsup_{n\to\infty} a_n = e,\ \liminf_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}$

27. $a > 0$ के लिए, श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$$

अभिसारी होती है, यदि तथा मात्र यदि

1. $0 < a < e$
2. $0 < a \leq e$
3. $0 < a < \frac{1}{e}$
4. $0 < a \leq \frac{1}{e}$

27. For $a > 0$, the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$$

is convergent if and only if

1. $0 < a < e$
2. $0 < a \leq e$
3. $0 < a < \frac{1}{e}$
4. $0 < a \leq \frac{1}{e}$

28. मानें कि A एक 4×4 आव्यूह है। मानें कि A की शून्य समष्टि $N(A)$ है

$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4\colon\ x + y + z = 0,\ x + y + w = 0\}$. तो

1. विम (स्तंभ समष्टि (A)) $= 1$
2. विम (स्तंभ समष्टि (A)) $= 2$
3. कोटि $(A) = 1$
4. $S = \{(1,1,1,0), (1,1,0,1)\}$, $N(A)$ का एक आधार है।

28. Let A be a 4×4 matrix. Suppose that the null space $N(A)$ of A is

$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4\colon\ x + y + z = 0,\ x + y + w = 0\}$. Then

1. dim (column space(A)) = 1
2. dim (column space(A)) = 2
3. rank (A) = 1
4. $S = \{(1,1,1,0), (1,1,0,1)\}$ is a basis of $N(A)$

29. मानें कि A तथा B वास्तविक व्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं ताकि $AB = -BA$. तो

1. अनुरेख (A) = अनुरेख $(B) = 0$
2. अनुरेख (A) = अनुरेख $(B) = 1$
3. अनुरेख $(A) = 0$, अनुरेख $(B) = 1$
4. अनुरेख $(A) = 1$, अनुरेख $(B) = 0$

29. Let A and B be real invertible matrices such that $AB = -BA$. Then

1. Trace (A) = Trace $(B) = 0$
2. Trace (A) = Trace $(B) = 1$
3. Trace $(A) = 0$, Trace $(B) = 1$
4. Trace $(A) = 1$, Trace $(B) = 0$

30. मानें कि A एक $n \times n$ स्वसंलग्न आव्यूह है, अभिलक्षणिक मान $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ के साथ। मानें कि
$\|X\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$,
$X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ के लिए।
यदि $p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n$ है, तो
$\sup_{\|X\|_2=1} \|p(A)X\|_2$ इस समान है:

1. $\max\{a_0 + a_1\lambda_j + \cdots + a_n\lambda_j^n : 1 \le j \le n\}$
2. $\max\{|a_0 + a_1\lambda_j + \cdots + a_n\lambda_j^n| : 1 \le j \le n\}$
3. $\min\{a_0 + a_1\lambda_j + \cdots + a_n\lambda_j^n : 1 \le j \le n\}$
4. $\min\{|a_0 + a_1\lambda_j + \cdots + a_n\lambda_j^n| : 1 \le j \le n\}$

30. Let A be an $n \times n$ self-adjoint matrix with eigenvalues $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.
Let $\|X\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$ for $X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$.
If $p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n$ then $\sup_{\|X\|_2=1} \|p(A)X\|_2$ is equal to

1. $\max\{a_0 + a_1\lambda_j + \cdots + a_n\lambda_j^n : 1 \le j \le n\}$
2. $\max\{|a_0 + a_1\lambda_j + \cdots + a_n\lambda_j^n| : 1 \le j \le n\}$
3. $\min\{a_0 + a_1\lambda_j + \cdots + a_n\lambda_j^n : 1 \le j \le n\}$
4. $\min\{|a_0 + a_1\lambda_j + \cdots + a_n\lambda_j^n| : 1 \le j \le n\}$

31. मानें कि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ तथा I एक 3×3 तत्समक आव्यूह है।
यदि $6A^{-1} = aA^2 + bA + cI$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ के लिए, तो (a, b, c) इस समान है

1. (1, 2, 1)
2. (1, −1, 2)
3. (4, 1, 1)
4. (1, 4, 1)

31. Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ and I be the 3×3 identity matrix.
If $6A^{-1} = aA^2 + bA + cI$ for $a, b, c \in \mathbb{R}$ then (a, b, c) equals

1. (1, 2, 1)
2. (1, −1, 2)
3. (4, 1, 1)
4. (1, 4, 1)

32. मानें कि $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ एक बहुपद है, जहां $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ । $x_0 \in \mathbb{R}$ को नियत करें। मानें कि
$S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : p(x) = a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c$ सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए$\}$.
तो S के अवयवों की संख्या है

1. 0
2. 1
3. दृढ़त: 1 से अधिक परंतु परिमित
4. अपरिमित

32. Let $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ be a polynomial, where $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Fix $x_0 \in \mathbb{R}$. Let
$S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : p(x) = a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c$ for all $x \in \mathbb{R}\}$.
Then the number of elements in S is

1. 0
2. 1
3. strictly greater than 1 but finite
4. infinite

Unit-2

33. जब 16^{2016} को 9 से भाजित किया जाता है तो पाये जाने वाला शेष है

1. 1
2. 2
3. 3
4. 7

33. The remainder obtained when 16^{2016} is divided by 9 equals

1. 1
2. 2
3. 3
4. 7

34. बहुपद वलय $\mathbb{C}[x,y]$ में गुणजावली $I = (x^2+1, y)$ पर विचारें। निम्न कथनों में से कौन-सा सही है?

1. I एक उच्चिष्ठ गुणजावली है।
2. I एक अभाज्य गुणजावली है परंतु एक उच्चिष्ठ गुणजावली नहीं है।
3. I एक उच्चिष्ठ गुणजावली है परंतु एक अभाज्य गुणजावली है नहीं है।
4. I न तो एक अभाज्य गुणजावली है, न तो एक उच्चिष्ठ गुणजावली है।

34. Consider the ideal $I = (x^2+1, y)$ in the polynomial ring $\mathbb{C}[x,y]$. Which of the following statements is true?

1. I is a maximal ideal
2. I is a prime ideal but not a maximal ideal
3. I is a maximal ideal but not a prime ideal
4. I is neither a prime ideal nor a maximal ideal

35. मानें कि $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ एक संतत मानचित्र है। सही कथन को चुनें।

1. f परिबद्ध है।
2. f का प्रतिबिंब, $\mathbb{R}$ का एक विवृत उपसमुच्चय है
3. $\mathbb{R}$ के सभी परिबद्ध उपसमुच्चयों A के लिए $f(A)$ परिबद्ध है।
4. $\mathbb{R}$ के सभी संहत उपसमुच्चयों A के लिए $f^{-1}(A)$ संहत है।

35. Let $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous map. Choose the correct statement.

1. f is bounded
2. The image of f is an open subset of $\mathbb{R}$
3. $f(A)$ is bounded for all bounded subsets A of $\mathbb{R}$
4. $f^{-1}(A)$ is compact for all compact subsets A of $\mathbb{R}$

36. मानें कि S 100 से लेकर 999 तक के सभी पूर्णांकों का, जो न तो 3 से न तो 5 से भाज्य हैं, का समुच्चय है। S के अवयवों की संख्या है

1. 480	2. 420
3. 360	4. 240

36. Let S be the set of all integers from 100 to 999 which are neither divisible by 3 nor divisible by 5. The number of elements in S is

1. 480	2. 420
3. 360	4. 240

37. मानें कि $z_0 \in \mathbb{C}$ के एक विवृत सामीप्य में f होलोमार्फिक है। यह दिये जाने पर कि

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_0)$$

निरपेक्षत: अभिसरित होता है, हम इस निष्कर्ष पर पहुंच सकते हैं कि

1. f अचर है।
2. f एक बहुपद है।
3. f को एक सर्वत्र वैश्लेषिक फलन तक विस्तरित किया जा सकता है।
4. $f(x) \in \mathbb{R}$, सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए।

37. Suppose f is holomorphic in an open neighbourhood of $z_0 \in \mathbb{C}$. Given that the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_0)$$

converges absolutely, we can conclude that

1. f is constant
2. f is a polynomial
3. f can be extended to an entire function
4. $f(x) \in \mathbb{R}$ for all $x \in \mathbb{R}$

38. मानें कि $\mathbb{C}$ में मूलबिंदु पर कैंद्रित एकांक वृत्त को C निर्दिष्ट करता है। तो

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C |1+z+z^2|^2 dz,$$

जहां समाकल C के समांतर वामावर्त लिया जाता है, इस समान है:

1. 0	2. 1
3. 2	4. 3

38. Let C denote the unit circle centered at the origin in $\mathbb{C}$.

$$\text{Then } \frac{1}{2\pi i}\int_C |1+z+z^2|^2 dz,$$

where the integral is taken anti-clockwise along C, equals

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3

39. घात श्रेणी

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \log(n) x^n$$

पर विचारें। श्रेणी $f(x)$ की अभिसरण त्रिज्या है

1. 0
2. 1
3. 3
4. ∞

39. Consider the power series

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \log(n) x^n.$$

The radius of convergence of the series $f(x)$ is

1. 0
2. 1
3. 3
4. ∞

40. किसी विषम पूर्णांक $k \geq 1$ के लिए. मानें कि $\mathcal{F}$ सभी सर्वत्र वैश्लेषिक फलनों f का समुच्चय है ताकि

$f(x) = |x^k|$ सभी $x \in (-1,1)$ के लिए। तो $\mathcal{F}$ की गणनसांख्यिकी है

1. 0
2. 1
3. दृढ़त: 1 से अधिक परंतु परिमित
4. अपरिमित

40. For an odd integer $k \geq 1$, let $\mathcal{F}$ be the set of all entire functions f such that

$f(x) = |x^k|$ for all $x \in (-1,1)$. Then the cardinality of $\mathcal{F}$ is

1. 0
2. 1
3. strictly greater than 1 but finite
4. infinite

Unit-3

41. योजना

$$f'(x) = Af(x) + Bf(x+h) + Cf(x+2h)$$

के लिए रुंडन त्रुटि का परिमाण है:

1. $h^2 f'''(\xi)$ if $A = -\frac{5}{6h}$, $B = \frac{3}{2h}$, $C = -\frac{2}{3h}$.
2. $h^2 f'''(\xi)$ if $A = \frac{5}{6h}$, $B = \frac{3}{2h}$, $C = \frac{2}{3h}$.
3. $h^2 f''(x)$ if $A = -\frac{5}{6h}$, $B = \frac{3}{2h}$, $C = -\frac{2}{3h}$.
4. $h^2 f''(x)$ if $A = \frac{5}{6h}$, $B = \frac{3}{2h}$, $C = \frac{2}{3h}$.

41. The magnitude of the truncation error for the scheme

$f'(x) = Af(x) + Bf(x+h) + Cf(x+2h)$ is equal to

1. $h^2 f'''(\xi)$ if $A = -\frac{5}{6h}$, $B = \frac{3}{2h}$, $C = -\frac{2}{3h}$.
2. $h^2 f'''(\xi)$ if $A = \frac{5}{6h}$, $B = \frac{3}{2h}$, $C = \frac{2}{3h}$.
3. $h^2 f''(x)$ if $A = -\frac{5}{6h}$, $B = \frac{3}{2h}$, $C = -\frac{2}{3h}$.
4. $h^2 f''(x)$ if $A = \frac{5}{6h}$, $B = \frac{3}{2h}$, $C = \frac{2}{3h}$.

42. फलनों

$$\left\{u \in C^1[0,1] \text{ ताकि } u(0) = 0 \text{ तथा } \max_{[0,1]}|u| = 1\right\}$$

के वर्ग पर $\int_0^1 (u'(t))^2 dt$ का निम्नक इस समान है:

1. 0
2. 1/2
3. 1
4. 2

42. The infimum of $\int_0^1 (u'(t))^2 dt$ on the class of functions

$$\left\{u \in C^1[0,1] \text{ such that } u(0) = 0 \text{ and } \max_{[0,1]}|u| = 1\right\}$$

is equal to

1. 0
2. 1/2
3. 1
4. 2

43. मानें कि $\phi(x)$.
$\int_0^x e^{x-t}\phi(t)dt = x,\ \ x > 0$ का हल है।
तो $\phi(1)$ इस समान है:

1. -1
2. 0
3. 1
4. 2

43. Let $\phi(x)$ be the solution of
$\int_0^x e^{x-t}\phi(t)dt = x, \quad x > 0$. Then $\phi(1)$ equals

1. -1
2. 0
3. 1
4. 2

44. किसी दृढ़ पिंड जिसकी एक बिंदु O स्थिरीकरित है, तथा O के गिर्द कोई बाह्य बल आघूर्ण नहीं है, के जड़त्व के मुख्य आघूर्ण समान हैं। तो पिंड को घूर्णन करना चाहिए

1. चर परिमाण की कोणीय गति के साथ
2. अचर परिमाण की कोणीय गति के साथ
3. अचर कोणीय संवेग परंतु चर कोणीय गति के साथ
4. चर कोणीय संवेग तथा चर कोणीय गति के साथ

44. A rigid body having one point O fixed and no external torque about O has equal principal moments of inertia. Then the body must rotate with

1. angular velocity of variable magnitude
2. angular velocity with constant magnitude
3. constant angular momentum but varying angular velocity
4. varying angular momentum with varying angular velocity

45. त्रिज्या a के एक चिकने गोले पर गुरुत्व के अधीन गतिशील, द्रव्यमान m के एक कण को अंतर्विष्ट करते एक गोलीय लोलक पर विचारें। गोलीय ध्रुवीय, कोण θ, ϕ, के उपयोग से, जिसमें θ अधोमुखी ऊर्ध्वाधर से ऊपर मापा जाता है, लग्रांजी दिया जाता है:

1. $ma\left[\frac{a}{2}(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\theta) - g\cos\theta\right]$
2. $ma\left[\frac{a}{2}(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\theta) + g\cos\theta\right]$
3. $ma\left[\frac{a}{2}(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \cos^2\theta) + g\sin\theta\right]$
4. $ma\left[\frac{a}{2}(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \cos^2\theta) - g\sin\theta\right]$

45. Consider a spherical pendulum consisting of a particle of mass m which moves under gravity on a smooth sphere of radius a. In terms of spherical polar angles θ, ϕ, with θ measured up from the downward vertical, the Lagrangian is given by

1. $ma\left[\frac{a}{2}(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\theta) - g\cos\theta\right]$
2. $ma\left[\frac{a}{2}(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\theta) + g\cos\theta\right]$
3. $ma\left[\frac{a}{2}(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \cos^2\theta) + g\sin\theta\right]$
4. $ma\left[\frac{a}{2}(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \cos^2\theta) - g\sin\theta\right]$

46. मानें कि $x: [0,\infty) \to [0,\infty)$ संतत है तथा $x(0) = 0$.

यदि $\left(x(t)\right)^2 \le 2 + \int_0^t x(s)ds, \quad \forall t \ge 0$, तो निम्न में कौन-सा **सही** है?

1. $x(\sqrt{2}) \in [0,2]$
2. $x(\sqrt{2}) \in \left[0, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$
3. $x(\sqrt{2}) \in \left[\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}\right]$
4. $x(\sqrt{2}) \in [10,\infty)$

46. Suppose $x: [0, \infty) \to [0, \infty)$ is continuous and $x(0) = 0$.

If $\left(x(t)\right)^2 \leq 2 + \int_0^t x(s)ds, \quad \forall t \geq 0$, then which of the following is TRUE?

1. $x(\sqrt{2}) \in [0,2]$
2. $x(\sqrt{2}) \in \left[0, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$
3. $x(\sqrt{2}) \in \left[\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}\right]$
4. $x(\sqrt{2}) \in [10, \infty)$

47. $u(x, 0) = g(x)$ के अधीन, आंशिक अवकल समीकरण

$u_t - xu_x + 1 - u = 0, x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$

का हल है

1. $u(x,t) = 1 - e^{-t}(1 - g(xe^t))$
2. $u(x,t) = 1 + e^t(1 - g(xe^t))$
3. $u(x,t) = 1 - e^{-t}(1 - g(xe^{-t}))$
4. $u(x,t) = e^{-t}(1 - g(xe^t))$

47. The solution of the partial differential equation

$u_t - xu_x + 1 - u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$

subject to $u(x, 0) = g(x)$ is

1. $u(x,t) = 1 - e^{-t}(1 - g(xe^t))$
2. $u(x,t) = 1 + e^t(1 - g(xe^t))$
3. $u(x,t) = 1 - e^{-t}(1 - g(xe^{-t}))$
4. $u(x,t) = e^{-t}(1 - g(xe^t))$

48. मानें कि $u \in C^2(\bar{B})$, $\mathbb{R}^2$ में B इकाई गोला है, B में $\Delta u = f$

तथा ∂B पर $\alpha u + \frac{\partial u}{\partial n} = g, \quad \alpha > 0$,

जहां B का इकाई बाह्य लंब $\boldsymbol{n}$ है, को समाधान करता है। यदि एक हल का अस्तित्व है तो

1. वह अद्‌वितीय है।
2. यथार्थतः दो हल हैं।
3. यथार्थतः तीन हल हैं।
4. अपरिमिततः कई हल हैं।

48. Suppose $u \in C^2(\bar{B})$, B is the unit ball in $\mathbb{R}^2$, satisfies

$\Delta u = f$ in B

$$\alpha u + \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = g \quad \text{on } \partial B, \quad \alpha > 0,$$

where $\boldsymbol{n}$ is the unit outward normal to B. If a solution exists then

1. it is unique
2. there are exactly two solutions
3. there are exactly three solutions
4. there are infinitely many solutions

Unit-4

49. मानें कि X माध्य $1/\lambda$ के एक चरघातांकी बंटन से निकाला गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। यदि λ का एक पूर्व बंटन, प्रायिकता घनत्व फलन

$$g(\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda} & ; \quad \lambda > 0 \\ 0 & ; \quad \lambda \leq 0 \end{cases}$$

के साथ है, तो वर्गकृत त्रुटि हानि फलन के संदर्भ में $1/\lambda$ का बेज़ आकलक है:

1. $\frac{2}{X+1}$
2. $\frac{1}{X}$
3. X
4. $\frac{X+1}{2}$

49. Let X be a random sample from an exponential distribution with mean $1/\lambda$. If λ has a prior distribution with probability density function

$$g(\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda} & ; \quad \lambda > 0 \\ 0 & ; \quad \lambda \leq 0 \end{cases}$$

then the Bayes estimator of $1/\lambda$ with respect to the squared error loss function is

1. $\frac{2}{X+1}$
2. $\frac{1}{X}$
3. X
4. $\frac{X+1}{2}$

50. रैखिक सांख्यिकीय प्रतिमान

$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij};\ \ i = 1, 2, \cdots, a;\ \ j = 1, 2, \cdots, n$

पर विचारें जहां μ अज्ञात है, τ_i स्वंतत्रत: तथा सर्वथासमानत: $N(0, \sigma_\tau^2)$, जैसे बंटित है, ε_{ij} स्वतंत्रत: तथा सर्वथा समानत: $N(0, \sigma^2)$ के रूप में बंटित है; सभी i तथा j के लिए τ_i तथा ε_{ij} स्वतंत्र हैं। ग़ौर करें कि i^{th} उपचार का प्रभाव τ_i है। मानें कि $SS_{total}, SS_{\ treatment}, SS_{error}$ क्रमश: कुल वर्गों का योगफल, कुल उपचार वर्गों का योगफल तथा त्रृटि वर्गों का योगफल हैं।

$H_0: \sigma_\tau^2 = 0$ बनाम $H_A: \sigma_\tau^2 > 0$

के परीक्षण हेतु निम्न कथनों में से कौन-सा सही **नहीं** है?

1. वर्गों के योगफल की सर्वसमिका है $SS_{total} = SS_{\ treatment} + SS_{error}$
2. $SS_{error} \sim \sigma^2 x^2{}_{n(a-1)}$
3. H_0, के अधीन $\frac{\frac{SS_{treatment}}{a-1}}{\frac{SS_{error}}{n(a-1)}} \sim F_{a-1, n(a-1)}$
4. $E(SS_{error}) = n(a-1)\,(\sigma^2 + n\sigma_\tau^2)$

50. Consider the linear statistical model

$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij};\ \ i = 1, 2, \cdots, a;\ \ j = 1, 2, \cdots, n$

where μ is unknown, τ_i are independently and identically distributed as $N(0, \sigma_\tau^2)$, ε_{ij} are independently and identically distributed as $N(0, \sigma^2)$; τ_i and ε_{ij} are independent for all i and j. Note that τ_i is the i^{th} treatment effect. Suppose $SS_{total}, SS_{\ treatment}, SS_{error}$ are total sum of squares, total treatment sum of squares and error sum of squares, respectively. To test :$H_0: \sigma_\tau^2 = 0$ vs $H_A: \sigma_\tau^2 > 0$ which of the following statements is **not** true?

1. The sum of squares identity is $SS_{total} = SS_{\ treatment} + SS_{error}$
2. $SS_{error} \sim \sigma^2 x^2{}_{n(a-1)}$
3. Under H_0, $\frac{\frac{SS_{treatment}}{a-1}}{\frac{SS_{error}}{n(a-1)}} \sim F_{a-1, n(a-1)}$
4. $E(SS_{error}) = n(a-1)\,(\sigma^2 + n\sigma_\tau^2)$

51. मानें कि (X_1, X_2) द्विचर प्रसामान्य बंटन का अनुकरण करता है, $E(X_1) = E(X_2) = 0$, $V(X_1) = V(X_2) = 2$ तथा $Cov(X_1, X_2) = -1$ के साथ। यदि $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy$ है, तो $P[X_1 - X_2 > 6]$ इस समान है:

1. $\Phi(-1)$
2. $\Phi(-3)$
3. $\Phi(\sqrt{6})$
4. $\Phi(-\sqrt{6})$

51. Suppose (X_1, X_2) follows a bivariate normal distribution with $E(X_1) = E(X_2) = 0$, $V(X_1) = V(X_2) = 2$ and $Cov(X_1, X_2) = -1$. If $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy$, then $P[X_1 - X_2 > 6]$ is equal to

1. $\Phi(-1)$
2. $\Phi(-3)$
3. $\Phi(\sqrt{6})$
4. $\Phi(-\sqrt{6})$

52. आमाप 20 वाली परिमित समष्टि से आमाप 2 के एक प्रतिदर्श निकालने की समस्या पर विचारें। प्रतियचन योजना 'आमाप के अनुपात में प्रायिकता' के उपयोग से पुन:स्थापन के साथ प्रतिचयन किया जाता है। मानकित आमाप माप $p_1, \cdots, p_{20}$ इससे दिये जाते हैं: $p_i = \frac{1}{40}$, $i = 1, \cdots, 10$, $p_i = \frac{3}{40}$, $i = 11, \cdots, 20$.

निकाली गयी सुस्पष्ट इकाइयों की प्रत्याशित संख्या है।

1. $\frac{83}{80}$
2. $\frac{157}{80}$
3. $\frac{17}{16}$
4. $\frac{31}{16}$

52. Consider the problem of drawing a sample of size 2 from a finite population of size 20. The sampling is done with replacement using probability proportional to size sampling scheme. The normed size measures $p_1, \cdots, p_{20}$ are given by $p_i = \frac{1}{40}$, $i = 1, \cdots, 10$, $p_i = \frac{3}{40}$, $i = 11, \cdots, 20$.

The expected number of distinct units drawn is

1. $\frac{83}{80}$
2. $\frac{157}{80}$
3. $\frac{17}{16}$
4. $\frac{31}{16}$

53. एक बक्से में 40 अंकित लाल गेंद तथा 60 अंकित काले गेंद हैं। बक्से से यादृच्छिकत: एक-एक करके गेंद, बिना पुन:स्थापन के, बाहर निकाले जाते हैं, तब तक, जब तक सभी गेंद बाहर नहीं निकाले जाते। निकाली गयी अंतिम गेंद की काली होने की प्रायिकता है

1. $1/_{100}$
2. $1/_{60}$
3. $3/_{5}$
4. $2/_{3}$

53. A box contains 40 numbered red balls and 60 numbered black balls. From the box, balls are drawn one by one at random without replacement till all the balls are drawn. The probability that the last ball drawn is black equals

1. $1/_{100}$
2. $1/_{60}$
3. $3/_{5}$
4. $2/_{3}$

54. $X_1, X_2, \cdots$ स्वतंत्र: सवर्था समानत: बंटित यादृच्छिक चर हैं जिनका आम घनत्व f है। मानें कि सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए $f(x) = f(-x)$ है। निम्न कथनों में से कौन-सा सही है?

1. प्रायिकता में $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \to 0$ है।
2. करीब-करीब निश्चितत: $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \to 0$
3. $P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n) < 0\right) \to \frac{1}{2}$
4. $\sum_{i=1}^{n} X_i$ और $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i X_i$ समान बंटन रखता है।

54. $X_1, X_2, \cdots$ are independent identically distributed random variables having common density f. Assume $f(x) = f(-x)$ for all $x \in \mathbb{R}$. Which of the following statements is correct?

1. $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \to 0$ in probability
2. $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \to 0$ almost surely
3. $P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n) < 0\right) \to \frac{1}{2}$
4. $\sum_{i=1}^{n} X_i$ has the same distribution as $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i X_i$

55. मानें कि समय t तक हुई दुर्घटनाओं की संख्या को N_t निर्दिष्ट करता है। मानें कि $\{N_t\}$ एक प्वासों प्रक्रिया है, तीव्रता 2 के साथ। इसके दिये जाने पर कि समय काल $[20, 30]$ में ठीक-ठीक 5 दुर्घटनायें हैं, इसकी सप्रतिबंध प्रायिकता क्या है कि समय काल $[15, 25]$ में ठीक-ठीक एक दुर्घटना है?

1. $\frac{15}{32}e^{-10}$
2. $20\,e^{-20}$
3. $\frac{10^5}{5!}e^{-30}$
4. $\frac{1}{5}$

55. Let N_t denote the number of accidents up to time t. Assume that $\{N_t\}$ is a Poisson process with intensity 2. Given that there are exactly 5 accidents during the time period [20, 30], what is the conditional probability that there is exactly one accident during the time period $[15, 25]$?

1. $\frac{15}{32}e^{-10}$
2. $20\,e^{-20}$
3. $\frac{10^5}{5!}e^{-30}$
4. $\frac{1}{5}$

56. प्रत्येक घनत्व

$f(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2},\ -\infty < t < \infty.$

युक्त स्वतंत्र यादृच्छिक चर X तथा Y हैं। तो $-\infty < t < \infty$ के लिए $\frac{X+Y}{3}$ का घनत्व फलन इससे दिया जाता है।

1. $\frac{6}{\pi}\frac{1}{4+9t^2}$
2. $\frac{6}{\pi}\frac{1}{9+4t^2}$
3. $\frac{3}{\pi}\frac{1}{1+9t^2}$
4. $\frac{3}{\pi}\frac{1}{9+t^2}$

56. X and Y are independent random variables each having the density

$f(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2},\ -\infty < t < \infty.$

Then the density function of $\frac{X+Y}{3}$ for $-\infty < t < \infty$ is given by

1. $\frac{6}{\pi}\frac{1}{4+9t^2}$
2. $\frac{6}{\pi}\frac{1}{9+4t^2}$
3. $\frac{3}{\pi}\frac{1}{1+9t^2}$
4. $\frac{3}{\pi}\frac{1}{9+t^2}$

57. यदि हम लैटिन वर्ग अभिकल्पना (LSD), के दो स्तंभों को आपस में विनिमय करते हैं, तो नयी अभिकल्पना है

1. एक LSD
2. एक पूर्णत: यादृच्छीकृत अभिकल्पना (CRD) परंतु एक LSD नहीं।
3. एक यादृच्छीकृत खंड अभिकल्पना (RBD) परंतु एक LSD नहीं।
4. एक संतुलित अपूर्ण खंड अभिकल्पना (BIBD) परंतु एक LSD नहीं।

57. If we interchange two columns of a Latin square design (LSD), then the new design is

1. an LSD
2. a completely randomised design (CRD) but not an LSD
3. a randomised block design (RBD) but not an LSD
4. a balanced incomplete block design (BIBD) but not an LSD

58. रैखिक प्रोग्रामन समस्या (LPP) पर विचारें:

$c^t x$ का न्यूनीकरण प्रतिबंध $Ax = b, x \geq 0$, जहां

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$,
$c = (2, -1, 1, -9, 0)^t$, तथा

$x = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)^t$ हैं, के अधीन करें। संशोधित एकल प्रविधि, चलित आधार $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ के उपयोग द्वारा पाये जाने वाला सही निष्कर्ष निम्न में से कौन-सा है?

1. अगला प्रवेश करता चर x_5 है।
2. चलित आधार से संगत हल इष्टतम है।
3. अगला प्रवेश करता चर x_4 है।
4. अगला प्रवेश करता चर x_3 है।

58. Consider the LPP:

Minimize $c^t x$ subject to $Ax = b, x \geq 0$, where

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$,
$c = (2, -1, 1, -9, 0)^t$, and

$x = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)^t$.
Using the revised simplex method with current basis as $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, which of the following statements is correct?

1. The next entering variable is x_5
2. The solution corresponding to the current basis is optimal
3. The next entering variable is x_4
4. The next entering variable is x_3

59. मानें कि प्रायिकता बंटन फलन

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^\theta}{\Gamma(\theta)}\ x^{\theta-1}e^{-x\theta} & ;\ x > 0 \\ 0 & ;\ x \leq 0 \end{cases}$$

$\theta > 0$ के साथ, युक्त एक बंटन से निकाला गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श $\{X_1, \cdots, X_n\}, n \geq 2$ है। तो θ का आघूर्ण विधि आकलक

1. का अस्तित्व नहीं है।
2. $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2}$ है।
3. $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$ है।
4. $\frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2}$ है।

59. Suppose $\{X_1, \cdots, X_n\}, n \geq 2$, is a random sample from the distribution with probability density function

$$f(x;\,\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^\theta}{\Gamma(\theta)}\ x^{\theta-1}e^{-x\theta} & ;\ x > 0 \\ 0 & ;\ x \leq 0 \end{cases}$$

with $\theta > 0$. Then the *method of moments* estimator of θ

1. does not exist
2. is $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2}$
3. is $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$
4. is $\frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2}$

60. मानें कि $\theta > 0$ के लिए प्रायिकता फलन

$$f(x;\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{if } x > \theta \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

युक्त बंटन से निकाला गया एक प्रतिदर्श, $n \geq 5$ के लिए $X_1, X_2, \cdots, X_n$ है। θ के लिए विश्वास्यता अंतराल

$$\left[\min\{X_1,\cdots,X_n\} - \frac{\ln 4}{n},\ \min\{X_1,\cdots,X_n\} + \frac{\ln 2}{n}\right]$$

का विश्वास्यता गुणांक है।

1. 0.5
2. 0.75
3. 0.95
4. $1-\frac{1}{2^n}$

60. Let $X_1, X_2, \cdots, X_n$ for $n \geq 5$ be a random sample from the distribution with probability density function

$$f(x;\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{if } x > \theta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

for $\theta > 0$. The confidence coefficient of the confidence interval

$$\left[\min\{X_1,\cdots,X_n\} - \frac{\ln 4}{n},\ \min\{X_1,\cdots,X_n\} + \frac{\ln 2}{n}\right]$$

for θ, is

1. 0.5
2. 0.75
3. 0.95
4. $1-\frac{1}{2^n}$

भाग \PART 'C'

Unit-1

61. यदि $n \in \mathbb{N}$ के लिए $\lambda_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^n}$ है, तो

1. कुछ n के लिए λ_n का अस्तित्व नहीं होता।
2. हर n के लिए λ_n का अस्तित्व है तथा अनुक्रम अपरिबद्ध है।
3. हर n के लिए λ_n का अस्तित्व है तथा अनुक्रम परिबद्ध है।
4. $\lim_{n\to\infty} (\lambda_n)^{1/n} = 1$

61. If $\lambda_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^n}$ for $n \in \mathbb{N}$, then

1. λ_n does not exist for some n
2. λ_n exists for every n and the sequence is unbounded
3. λ_n exists for every n and the sequence is bounded
4. $\lim_{n\to\infty} (\lambda_n)^{1/n} = 1$

62. समीकरण

$11^x + 13^x + 17^x - 19^x = 0$

1. का कोई वास्तविक मूल नहीं है।
2. का मात्र एक वास्तविक मूल है।
3. के यथार्थत: दो वास्तविक मूल हैं।
4. के दो से अधिक वास्तविक मूल हैं।

62. The equation

$11^x + 13^x + 17^x - 19^x = 0$ has

1. no real root
2. only one real root
3. exactly two real roots
4. more than two real roots

63. मानें कि $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$f(\underline{x}) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$, से दिया जाता है, जहां $\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ तथा कम से कम एक a_j शून्येतर है। तो हम यह निष्कर्ष पर पहुंच सकते हैं कि

1. f सर्वत्र अवकलनीय नहीं है।
2. हर $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ के लिए प्रवणता $(\nabla f)(\underline{x}) \neq 0$ है।
3. यदि $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ऐसा है कि $(\nabla f)(\underline{x}) = 0$, तो $f(\underline{x}) = 0$ है।
4. यदि $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ऐसा है कि $f(\underline{x}) = 0$, तो $(\nabla f)(\underline{x}) = 0$ है।

63. Suppose that $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is given by $f(\underline{x}) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$, where $\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ and at least one a_j is not zero. Then we can conclude that

1. f is not everywhere differentiable
2. the gradient $(\nabla f)(\underline{x}) \neq 0$ for every $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$
3. if $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ is such that $(\nabla f)(\underline{x}) = 0$ then $f(\underline{x}) = 0$
4. if $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ is such that $f(\underline{x}) = 0$ then $(\nabla f)(\underline{x}) = 0$

64. मानें कि S, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ का समुच्चय है ताकि

$\frac{x^\alpha y^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$ जब $(x, y) \to (0, 0)$.

तो S इसमें अंतर्विष्टत है:

1. $\{(\alpha, \beta): \alpha > 0,\ \beta > 0\}$
2. $\{(\alpha, \beta): \alpha > 2,\ \beta > 2\}$
3. $\{(\alpha, \beta): \alpha + \beta > 1\}$
4. $\{(\alpha, \beta):\ \alpha + 4\beta > 1\}$

64. Let S be the set of $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ such that

$\frac{x^\alpha y^\beta}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$ as $(x, y) \to (0, 0)$.

Then S is contained in

1. $\{(\alpha, \beta): \alpha > 0,\ \beta > 0\}$
2. $\{(\alpha, \beta): \alpha > 2,\ \beta > 2\}$
3. $\{(\alpha, \beta): \alpha + \beta > 1\}$
4. $\{(\alpha, \beta):\ \alpha + 4\beta > 1\}$

65. घात n से कम या n के समान के वास्तविक बहुपदों की सदिश समष्टि V पर विचारें। भिन्न वास्तविक संख्याओं $a_0, a_1, \cdots, a_k$ को तय करें। $p \in V$ के लिए,

उच्च $\{|p(a_j)| : 0 \le j \le k\}$

V पर एक मानक की परिभाषा करता है

1. मात्र यदि $k < n$
2. मात्र यदि $k \geq n$
3. यदि $k + 1 \leq n$
4. यदि $k \geq n + 1$

65. Consider the vector space V of real polynomials of degree less than or equal to n. Fix distinct real numbers a_0, $a_1, \cdots, a_k$. For $p \in V$

$\max\{|p(a_j)| : 0 \le j \le k\}$

defines a norm on V

1. only if $k < n$
2. only if $k \geq n$
3. if $k + 1 \leq n$
4. if $k \geq n + 1$

66. मानें कि V, अधिक से अधिक 3 घात वाले $\mathbb{R}$ में गुणांक रखने वाले, चर x के बहुपदों की सदिश समष्टि है। मानें कि $T = d/dx$, V से उसी तक एक रैखिक रूपांतरण है, जो अवकलन से दिया जाता है। निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. T व्युत्क्रमणीय है।
2. T का एक अभिलक्षणिक मान 0 है।
3. ऐसे एक आधार है जिसके सापेक्ष T का आव्यूह शून्यंभावी है।
4. $\{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3\}$ आधार के सापेक्ष T का आव्यूह विकर्ण है।

66. Let V be the vector space of polynomials of degree at most 3 in a variable x with coefficients in $\mathbb{R}$. Let $T = d/dx$ be the linear transformation of V to itself given by differentiation. Which of the following are correct?

1. T is invertible
2. 0 is an eigenvalue of T

3. There is a basis with respect to which the matrix of T is nilpotent.
4. The matrix of T with respect to the basis $\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ is diagonal

67. मानें कि m, n, r प्राकृतिक संख्यायें हैं। मानें कि A वास्तविक प्रविष्टियां युक्त एक $m \times n$ आव्यूह है ताकि $(AA^t)^r = I$, जहां I एक $m \times m$ तत्समक आव्यूह है, तथा A^t, आव्यूह A का परिवर्त है। हम यह निष्कर्ष पर पहुंच सकते हैं कि

1. $m = n$
2. AA^t व्युत्क्रमणीय है।
3. A^tA व्युत्क्रमणीय है।
4. यदि $m = n$ है, तो A व्युत्क्रमणीय है।

67. Let m, n, r be natural numbers. Let A be an $m \times n$ matrix with real entries such that $(AA^t)^r = I$, where I is the $m \times m$ identity matrix and A^t is the transpose of the matrix A. We can conclude that

1. $m = n$
2. AA^t is invertible
3. A^tA is invertible
4. if $m = n$, then A is invertible

68. मानें कि A एक $n \times n$ वास्तविक आव्यूह है, $A^2 = A$ के साथ। तो

1. A के अभिलक्षणिक मान या तो 0 या 1 हैं।
2. A एक विकर्ण आव्यूह है जिसकी विकर्ण प्रविष्टियां 0 या 1 हैं।
3. जाति $(A) =$ अनुरेख (A)
4. जाति $(I - A) =$ अनुरेख $(I - A)$

68. Let A be an $n \times n$ real matrix with $A^2 = A$. Then

1. the eigenvalues of A are either 0 or 1
2. A is a diagonal matrix with diagonal entries 0 or 1
3. rank $(A) =$ trace (A)
4. rank $(I - A) =$ trace $(I - A)$

69. किसी $n \times n$ आव्यूह B के लिए, मानें कि B की शून्य समष्टि $N(B) = \{X \in \mathbb{R}^n : BX = 0\}$ है। मानें कि A एक 4×4 आव्यूह है $dim(N(A - 2I)) = 2$, $\dim(N(A - 4I)) = 1$ तथा जाति $(A) = 3$ के साथ। तो

1. A के अभिलक्षणिक मान 0, 2 तथा 4 हैं।
2. सारणिक $(A) = 0$
3. A विकर्णनीय नहीं है।
4. अनुरेख $(A) = 8$

69. For any $n \times n$ matrix B, let $N(B) = \{X \in \mathbb{R}^n : BX = 0\}$ be the null space of B. Let A be a 4×4 matrix with $\dim(N(A - 2I)) = 2$, $\dim(N(A - 4I)) = 1$ and rank $(A) = 3$. Then

1. 0, 2 and 4 are eigenvalues of A
2. determinant $(A) = 0$
3. A is not diagonalizable
4. trace $(A) = 8$

70. $\mathbb{R}$ पर निम्न 3×3 आव्यूहों में से कौन-से विकर्णनीय हैं?

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

70. Which of the following 3×3 matrices are diagonalizable over $\mathbb{R}$?

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

71. मानें कि H एक वास्तविक हिल्बर्ट समष्टि है तथा $M \subseteq H$ एक संवृत रैखिक उपसमष्टि है। मानें कि $x_0 \in H\backslash M$ है। मानें कि $y_0 \in M$ ताकि $\|x_0 - y_0\|$ = न्यून $\{\|x_0 - y\| : y \in M\}$ है। तो

1. ऐसा एक y_0 अद्‌वितीय है।
2. $x_0 \perp M$
3. $y_0 \perp M$
4. $x_0 - y_0 \perp M$

71. Let H be a real Hilbert space and $M \subseteq H$ be a closed linear subspace. Let $x_0 \in H\backslash M$. Let $y_0 \in M$ be such that $\|x_0 - y_0\| = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in M\}$.

Then
1. such a y_0 is unique
2. $x_0 \perp M$
3. $y_0 \perp M$
4. $x_0 - y_0 \perp M$

72. मानें कि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $X \in \mathbb{R}^3$ के लिए $Q(X) = X^t AX$, तो

1. A के ठीक-ठीक दो धन अभिलक्षणिक मान हैं।
2. A के सभी अभिलक्षणिक मान धन हैं।
3. $Q(X) \geq 0$ सभी $X \in \mathbb{R}^3$ के लिए।
4. $Q(X) < 0$ कुछ $X \in \mathbb{R}^3$ के लिए।

72. Let $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ and $Q(X) = X^t AX$ for $X \in \mathbb{R}^3$. Then

1. A has exactly two positive eigenvalues
2. all the eigenvalues of A are positive
3. $Q(X) \geq 0$ for all $X \in \mathbb{R}^3$
4. $Q(X) < 0$ for some $X \in \mathbb{R}^3$

73. आव्यूह

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & 7 & 11 \\ 3x & 2x & 4 \\ 8x & 17 & 13 \end{pmatrix};\ x \in \mathbb{R}.$$

पर विचारें। तो

1. $A(x)$ का अभिलक्षणिक मान 0 है कुछ $x \in \mathbb{R}$ के लिए।
2. किसी भी $x \in \mathbb{R}$ के लिए $A(x)$ का एक अभिलक्षणिक मान 0 नहीं है।
3. सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए $A(x)$ का अभिलक्षणिक मान 0 है।
4. हर $x \in \mathbb{R}$ के लिए $A(x)$ व्युत्क्रमणीय है।

73. Consider the matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & 7 & 11 \\ 3x & 2x & 4 \\ 8x & 17 & 13 \end{pmatrix};\ x \in \mathbb{R}.$$

Then

1. $A(x)$ has eigenvalue 0 for some $x \in \mathbb{R}$
2. 0 is not an eigenvalue of $A(x)$ for any $x \in \mathbb{R}$
3. $A(x)$ has eigenvalue 0 for all $x \in \mathbb{R}$
4. $A(x)$ is invertible for every $x \in \mathbb{R}$

74. मानें कि $\alpha = 0.10110111011110\cdots$ एक दी गई, आधार 10 में लिखी हुई एक वास्तविक संख्या है, अर्थात्, α का n-th अंक 1 है, जब तक n, $\frac{k(k+1)}{2} - 1$ के रूप में नहीं है, अगर है तो उसका मान शून्य है। निम्न में से सभी सही कथनों को चुनें।

1. α एक परिमेय संख्या है।
2. α एक अपरिमेय संख्या है।
3. हर पूर्णांक $q \geq 2$ के लिए ऐसे एक पूर्णांक $r \geq 1$ का अस्तित्व है ताकि $\frac{r}{q} < \alpha < \frac{r+1}{q}$ हो।
4. α का कोई आवर्ती दशमिक प्रसार नहीं है।

74. Let $\alpha = 0.10110111011110\cdots$ be a given real number written in base 10, that is, the n-th digit of α is 1, unless n is of the form $\frac{k(k+1)}{2} - 1$ in which case it is 0. Choose all the correct statements from below.

1. α is a rational number
2. α is an irrational number
3. For every integer $q \geq 2$, there exists an integer $r \geq 1$ such that $\frac{r}{q} < \alpha < \frac{r+1}{q}$.
4. α has no periodic decimal expansion.

75. $a, b \in \mathbb{N}$ के लिए, अनुक्रम

$$d_n = \frac{\binom{n}{a}}{\binom{n}{b}}, n > a, b$$

के लिए, पर विचारें। निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं? जब $n \to \infty$,

1. $\{d_n\}$ a तथा b के सभी मानों के लिए अभिसरित होता है।
2. $\{d_n\}$ अभिसरित होता है यदि $a < b$ है।
3. $\{d_n\}$ अभिसरित होता है यदि $a = b$ है।
4. $\{d_n\}$ अभिसरित होता है यदि $a > b$ है।

75. For $a, b \in \mathbb{N}$, consider the sequence

$$d_n = \frac{\binom{n}{a}}{\binom{n}{b}}$$

for $n > a, b$. Which of the following statements are true? As $n \to \infty$,

1. $\{d_n\}$ converges for all values of a and b
2. $\{d_n\}$ converges if $a < b$
3. $\{d_n\}$ converges if $a = b$
4. $\{d_n\}$ converges if $a > b$

76. मानें कि $\{a_n\}$ वास्तविक संख्याओं का एक अनुक्रम है जो $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n - a_{n-1}| < \infty$ का समाधान करता है। तो श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$ अभिसारी है

1. $\mathbb{R}$ पर कहीं भी नहीं।
2. $\mathbb{R}$ पर सर्वत्र।
3. $(-1, 1)$ अंतर्विष्ट करते किसी समुच्चय पर।
4. मात्र $(-1, 1)$ पर।

76. Let $\{a_n\}$ be a sequence of real numbers satisfying $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n - a_{n-1}| < \infty$. Then the series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$ is convergent

1. nowhere on $\mathbb{R}$
2. everywhere on $\mathbb{R}$
3. on some set containing $(-1, 1)$
4. only on $(-1, 1)$

77. मानें कि $f(x) = \tan^{-1} x$, $x \in \mathbb{R}$. तो

1. सभी x के लिए $p(x)f'(x) = 1$ का समाधान करता हुआ एक बहुपद $p(x)$ का अस्तित्व है।
2. सभी धन सम पूर्णांकों n के लिए $f^{(n)}(0) = 0$ है।
3. अनुक्रम $\{f^{(n)}(0)\}$ अपरिबद्ध है।
4. $f^{(n)}(0) = 0$, सभी n के लिए।

77. Let $f(x) = \tan^{-1} x$, $x \in \mathbb{R}$. Then

1. there exists a polynomial $p(x)$ satisfying $p(x)f'(x) = 1$, for all x
2. $f^{(n)}(0) = 0$ for all positive even integers n
3. the sequence $\{f^{(n)}(0)\}$ is unbounded
4. $f^{(n)}(0) = 0$ for all n

78. मानें कि $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ के लिए $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$ है। निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. $[0, 1]$ पर f_n बिंदुश: एक संतत फलन तक अभिसरित होता है।
2. $[0, 1]$ पर f_n एकसमानत: अभिसरित होता है।
3. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ पर f_n एकसमानत: अभिसरित होता है।
4. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$

78. Let $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$ for $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Which of the following are true?

1. f_n converges pointwise on $[0, 1]$ to a continuous function
2. f_n converges uniformly on $[0, 1]$
3. f_n converges uniformly on $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$
4. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$

Unit-2

79. मानें कि G एक समूह है कोटि 125 का। निम्न कथनों में से कौन-से आवश्यकत: सही हैं?

1. G का एक अतुच्छ आबेली उपसमूह है।
2. G का कैंद्र एक उचित उपसमूह है।
3. G के कैंद्र की कोटि 5 है।
4. कोटि 25 का एक उपसमूह है।

79. Let G be a group of order 125. Which of the following statements are necessarily true?

1. G has a non-trivial abelian subgroup
2. The centre of G is a proper subgroup
3. The centre of G has order 5
4. There is a subgroup of order 25

80. मानें कि R तत्समक युक्त एक शून्येतर वलय है, सभी $a \in R$ के लिए $a^2 = a$ है। निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं ?

1. ऐसा कोई वलय नहीं होता।
2. सभी $a \in R$ के लिए $2a = 0$ है।
3. सभी $a \in R$ के लिए $3a = 0$ है।
4. R का एक उपवलय $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ है।

80. Let R be a non-zero ring with identity such that $a^2 = a$ for all $a \in R$. Which of the following statements are true?

1. There is no such ring
2. $2a = 0$ for all $a \in R$
3. $3a = 0$ for all $a \in R$
4. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ is a subring of R

81. $\mathbb{Z}[x]$ में निम्न बहुपदों में कौन-से अलघुकरणीय हैं ?

1. $x^4 + 10x + 5$
2. $x^3 - 2x + 1$
3. $x^4 + x^2 + 1$
4. $x^3 + x + 1$

81. Which of the following polynomials are irreducible in $\mathbb{Z}[x]$?

1. $x^4 + 10x + 5$
2. $x^3 - 2x + 1$
3. $x^4 + x^2 + 1$
4. $x^3 + x + 1$

82. मानें कि X कोई सांस्थितिक समष्टि है। मानें कि $A \subseteq X$ अरिक्त है। $x, y \in A$ के लिए $x \sim y$ परिभाषित करें यदि एक संबंधित उपसमुच्चय $C \subseteq A$ है ताकि $x, y \in C$ हो। $x \in A$ के लिए, परिभाषित करें कि
$C(x) = \{y \in A \ : \ y \sim x\}$ है, तो

1. $C(x) = C(y) \Rightarrow x = y$
2. $C(x) = C(y) \Rightarrow x \sim y$
3. $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset \Rightarrow x \sim y$
4. $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset \Rightarrow C(x) = C(y)$

82. Let X be any topological space. Let $A \subseteq X$ be nonempty. For $x, y \in A$, define $x \sim y$ if there is a connected subset $C \subseteq A$ such that $x, y \in C$. For $x \in A$, define
$C(x) = \{y \in A \ : \ y \sim x\}$. Then

1. $C(x) = C(y) \Rightarrow x = y$
2. $C(x) = C(y) \Rightarrow x \sim y$
3. $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset \Rightarrow x \sim y$
4. $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset \Rightarrow C(x) = C(y)$

83. मानें कि X एक सांस्थितिक समष्टि है, तथा X की एक उपसमष्टि Y है। लिखें कि $i: Y \to X$, आविष्टि प्रतिचित्र के लिए। सही कथन(नों) को चुनें :

1. यदि Y की उपसमष्टि सांस्थितिकी है, तो i संतत है।
2. यदि i संतत है, तो Y की उपसमष्टि सांस्थितिकी है।
3. यदि X की विवृत उपसमष्टि Y है, तो $i(U)$, Y पर उपसमष्टि सांस्थितिकी में विवृत सभी उपसमुच्चयों $U \subseteq Y$ के लिए, X में विवृत है।
4. यदि X की संहत उपसमष्टि Y है, तो $i(U)$, Y पर उपसमष्टि सांस्थितिकी में विवृत सभी उपसमुच्चयों $U \subseteq Y$ के लिए, X में विवृत है।

83. Let X be a topological space and Y a subset of X. Write $i: Y \to X$ for the inclusion map. Choose the correct statement(s):

1. If Y has the subspace topology, then i is continuous
2. If i is continuous, then Y has the subspace topology
3. If Y is an open subset of X, then $i(U)$ is open in X for all subsets $U \subseteq Y$ that are open in the subspace topology on Y
4. If Y is a compact subset of X, then $i(U)$ is open in X for all subsets $U \subseteq Y$ that are open in the subspace topology on Y

84. एक पूर्णांक $n \geq 2$ के लिए, मानें कि n अक्षरों पर क्रमचय समूह S_n है तथा A_n एकांतर समूह है। मानें कि, गुणन के अंदर शून्येतर सम्मिश्र संख्याओं का समूह $\mathbb{C}^*$ है। निम्न में से सही कथन कौन-से हैं?

1. हर पूर्णांक $n \geq 2$ के लिए,एक अतुच्छ समाकारिता $\chi: S_n \to \mathbb{C}^*$ है।
2. हर पूर्णांक $n \geq 2$ के लिए, एक अद्वितीय अतुच्छ समाकारिता $\chi: S_n \to \mathbb{C}^*$ है।
3. हर पूर्णांक $n \geq 3$ के लिए, एक अतुच्छ समाकारिता $\chi: A_n \to \mathbb{C}^*$ है।
4. हर पूर्णांक $n \geq 5$, के लिए, एक अतुच्छ समाकारिता $\chi: A_n \to \mathbb{C}^*$ नहीं है।

84. For an integer $n \geq 2$, let S_n be the permutation group on n letters and A_n the alternating group. Let $\mathbb{C}^*$ be the group of non-zero complex numbers under multiplication. Which of the following are correct statements?

1. For every integer $n \geq 2$, there is a nontrivial homomorphism $\chi: S_n \to \mathbb{C}^*$.
2. For every integer $n \geq 2$, there is a unique nontrivial homomorphism $\chi: S_n \to \mathbb{C}^*$.
3. For every integer $n \geq 3$, there is a nontrivial homomorphism $\chi: A_n \to \mathbb{C}^*$.
4. For every integer $n \geq 5$, there is no nontrivial homomorphism $\chi: A_n \to \mathbb{C}^*$.

85. प्रथम दस धन पूर्णांकों के समुच्चय $\{1,2,\dots,10\}$ पर, सभी $\mathbb{Z}_2$-मान के फलनों के समुच्चय को मानें कि $R = \{f: \{1,2,\dots,10\} \to \mathbb{Z}_2\}$ । तो फलनों के बिंदुश: गुणन तथा बिंदुश: योग युक्त एक क्रमविनिमेय वलय R है। निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1. R की एक अद्वितीय उच्चिष्ठ गुणजावली है।
2. R की प्रत्येक अभाज्य गुणजावली, उच्चिष्ठ भी है।
3. R की उचित गुणजावलियों की संख्या 511 है।
4. R का हर अवयव वर्गसम है।

85. Let $R = \{f: \{1,2,\dots,10\} \to \mathbb{Z}_2\}$ be the set of all $\mathbb{Z}_2$-valued functions on the set $\{1,2,\dots,10\}$ of the first ten positive integers. Then R is commutative ring with pointwise addition and pointwise multiplication of functions. Which of the following statements are correct?

1. R has a unique maximal ideal.
2. Every prime ideal of R is also maximal.
3. Number of proper ideals of R is 511.
4. Every element of R is idempotent.

86. निम्न वलयों में से कौन-से मुख्य गुणजावली प्रांत (PID) हैं?

1. $\mathbb{Q}[x]$
2. $\mathbb{Z}[x]$
3. $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[x]$
4. $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[x]$

86. Which of the following rings are principal ideal domains (PID)?

1. $\mathbb{Q}[x]$
2. $\mathbb{Z}[x]$
3. $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[x]$
4. $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[x]$

87. मानें कि $f = u + iv$ एक सर्वत्र वैश्लेषिक फलन है जहां f के वास्तविक तथा अधिकल्पित भाग क्रमश: u, v हैं। यदि सभी $a \in \mathbb{C}$ के लिए जैकोबी आव्यूह $J_a = \begin{bmatrix} u_x(a) & u_y(a) \\ v_x(a) & v_y(a) \end{bmatrix}$ सममित है, तो

1. f एक बहुपद है।
2. f घात ≤ 1का एक बहुपद है।

3. f आवश्यकत: एक अचर फलन है।
4. f एक बहुपद है जिसका घात दृढ़त: 1 से अधिक है।

87. Let $f = u + iv$ be an entire function where u, v are the real and imaginary parts of f respectively. If the Jacobian matrix

$$J_a = \begin{bmatrix} u_x(a) & u_y(a) \\ v_x(a) & v_y(a) \end{bmatrix}$$

is symmetric for all $a \in \mathbb{C}$, then

1. f is a polynomial.
2. f is a polynomial of degree ≤ 1.
3. f is necessarily a constant function.
4. f is a polynomial of degree strictly greater than 1.

88. फलन $f(z) = \frac{sin(\pi z/2)}{sin(\pi z)}$ पर विचारें। तो f के अनंतक हैं

1. सभी पूर्णांकों पर।
2. सभी सम पूर्णांकों पर।
3. सभी विषम पूर्णांकों पर।
4. रूप $4k+1,\ k \in \mathbb{Z}$ के सभी पूर्णांकों पर।

88. Consider the function $f(z) = \frac{\sin(\pi z/2)}{\sin(\pi z)}$.
Then f has poles at

1. all integers
2. all even integers
3. all odd integers
4. all integers of the form $4k + 1,\ k \in \mathbb{Z}$

89. मोबियस रूपांतरण $f(z) = \frac{1}{z},\ z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$ पर विचारें। यदि C उद्गम से गुजरता हुआ धन त्रिज्या युक्त एक वृत्त को निर्दिष्ट करता है, तो $C\setminus\{0\}$ को f मानचित्रित करता है

1. एक वृत्त तक।
2. एक रेखा तक।
3. उद्गम से गुज़रते एक रेखा तक।
4. उद्गम से नहीं गुज़रते एक रेखा तक।

89. Consider the Möbius transformation $f(z) = \frac{1}{z},\ z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$. If C denotes a circle with positive radius passing through the origin, then f maps $C\setminus\{0\}$ to

1. a circle.
2. a line.
3. a line passing through the origin.
4. a line not passing through the origin.

90. $G = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ पर परिभाषित निम्न फलनों $f(z)$ में से किसके लिए, G के संहत उपसमुच्चयों पर $f(z)$ को एकसमानत: सन्निकटित करते बहुपदों का कोई अनुक्रम नहीं है?

1. $\exp(z)$
2. $1/z$
3. z^2
4. $1/z^2$

90. For which among the following functions $f(z)$ defined on $G = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, is there no sequence of polynomials approximating $f(z)$ uniformly on compact subsets of G?

1. $\exp(z)$
2. $1/z$
3. z^2
4. $1/z^2$

Unit-3

91. मानें कि $y(x)$, समाकल समीकरण

$y(x) = x - \int_0^x xt^2 y(t)dt,\ x > 0$ का हल है। तो $x = \sqrt{2}$ पर फलन $y(x)$ का मान इस समान है:

1. $\frac{1}{\sqrt{2e}}$
2. $\frac{e}{2}$
3. $\frac{\sqrt{2}}{e^2}$
4. $\frac{\sqrt{2}}{e}$

91. Let $y(x)$ be the solution of the integral equation

$y(x) = x - \int_0^x xt^2 y(t)dt,\ x > 0.$

Then the value of the function $y(x)$ at $x = \sqrt{2}$ is equal to

1. $\frac{1}{\sqrt{2e}}$
2. $\frac{e}{2}$
3. $\frac{\sqrt{2}}{e^2}$
4. $\frac{\sqrt{2}}{e}$

92. समाकल समीकरण

$y(x) = 1 + \lambda \int_0^1 K(x,t)y(t)dt$, जहां

$K(x,t) = \begin{cases} \cosh x \sinh t, & 0 \le x \le t \\ \cosh t \sinh x, & t \le x \le 1 \end{cases}$

के हल $\lambda = -1$ तथा $\lambda = 3$ के लिए हैं क्रमश:

1. $-\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} - \tanh 1$ तथा $\frac{1}{4}\left(\frac{3\cos 2x}{\cos 2 - 2\sin 2 \tanh 1} + 1\right)$
2. $-\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} - \tanh 1$ तथा $\frac{1}{4}\left(\frac{3\cosh 2x}{\cosh 2 - 2\sinh 2 \tanh 1} + 1\right)$
3. $\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} - \tanh 1$ तथा $\frac{1}{4}\left(\frac{3\cosh 2x}{\cosh 2 - 2\sinh 2 \tanh 1} - 1\right)$
4. $\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} - \tanh 1$ तथा $\frac{1}{4}\left(\frac{3\cos 2x}{\cos 2 - 2\sin 2 \tanh 1} - 1\right)$

92. The solutions for $\lambda = -1$ and $\lambda = 3$ of the integral equation

$y(x) = 1 + \lambda \int_0^1 K(x,t)y(t)dt$, where

$K(x,t) = \begin{cases} \cosh x \sinh t, & 0 \le x \le t \\ \cosh t \sinh x, & t \le x \le 1 \end{cases}$

are , respectively,

1. $-\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} - \tanh 1$ and $\frac{1}{4}\left(\frac{3\cos 2x}{\cos 2 - 2\sin 2 \tanh 1} + 1\right)$
2. $-\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} - \tanh 1$ and $\frac{1}{4}\left(\frac{3\cosh 2x}{\cosh 2 - 2\sinh 2 \tanh 1} + 1\right)$
3. $\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} - \tanh 1$ and $\frac{1}{4}\left(\frac{3\cosh 2x}{\cosh 2 - 2\sinh 2 \tanh 1} - 1\right)$
4. $\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} - \tanh 1$ and $\frac{1}{4}\left(\frac{3\cos 2x}{\cos 2 - 2\sin 2 \tanh 1} - 1\right)$

93. फलनक

$I(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\sqrt{1 + y'^2}\, e^{tan^{-1}y'}\; dx$

पर विचारें, जहां $f(x,y) \neq 0$ है। चरम का वामांत बिंदु $A(x_0, y_0)$ पर स्थिरित किया जाए, तथा मानें कि दक्षिणांत $B(x_1, y_1)$ वक्र $y = \psi(x)$ के ऊपर जंगम है। तो चरम $y = y(x)$ वक्र $y = \psi(x)$ को प्रतिच्छेदित करता है, जिसके समांतर सीमा बिंदु $B(x_1, y_1)$ सरकता है इस कोण पर

1. $\pi/3$
2. $\pi/2$
3. $\pi/4$
4. $\pi/6$

93. Consider the functional

$I(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\sqrt{1 + y'^2}\, e^{\tan^{-1}y'}\; dx$

where

$f(x,y) \neq 0$. Let the left end of the extremal be fixed at the point $A(x_0, y_0)$ and the right end $B(x_1, y_1)$ be movable along the curve $y = \psi(x)$. Then the extremal $y = y(x)$ intersects the curve $y = \psi(x)$ along which the boundary point $B(x_1, y_1)$ slides at an angle

1. $\pi/3$
2. $\pi/2$
3. $\pi/4$
4. $\pi/6$

94. साधारण अवकल समीकरण

$y'(t) = -y^3 + y^2 + 2y,$

$y(0) = y_0 \in (0,2)$ के अधीन, के हल पर विचारें। तो

$\lim_{t\to\infty} y(t)$ इसका सदस्य है:

1. $\{-1, 0\}$
2. $\{-1, 2\}$
3. $\{0, 2\}$
4. $\{0, +\infty\}$

94. Consider the solution of the ordinary differential equation

$y'(t) = -y^3 + y^2 + 2y$ subject to $y(0) = y_0 \in (0,2)$. Then

$\lim_{t\to\infty} y(t)$ belongs to

1. $\{-1, 0\}$
2. $\{-1, 2\}$
3. $\{0, 2\}$
4. $\{0, +\infty\}$

95. यदि

$$\begin{cases}\frac{du}{dx} = y^2 + x^2 & , x > 0 \\ y(0) = 2\end{cases}$$

के हल का अस्तित्व अंतराल $[0,\ L_0)$ में हैं, तथा

$$\begin{cases}\frac{dz}{dx} = z^2 & , x > 0 \\ z(0) = 1\end{cases}$$

के अस्तित्व का उच्चिष्ठ अंतराल $[0, L_1)$ है, तो निम्न कथनों में कौन-से सही हैं?

1. $L_1 = 1, \quad L_0 > 1$
2. $L_1 = 1, \quad L_0 \le 1$
3. $L_1 < 2, \quad L_0 \le 1$
4. $L_1 > 2, \quad L_0 < 1$

95. If the solution to

$$\begin{cases}\frac{du}{dx} = y^2 + x^2 & , x > 0 \\ y(0) = 2\end{cases}$$

exists in the interval $[0,\ L_0)$ and the maximal interval of existence of

$$\begin{cases}\frac{dz}{dx} = z^2 & , x > 0 \\ z(0) = 1\end{cases}$$

is $[0, L_1)$, then which of the following statements are correct?

1. $L_1 = 1, \quad L_0 > 1$
2. $L_1 = 1, \quad L_0 \le 1$
3. $L_1 < 2, \quad L_0 \le 1$
4. $L_1 > 2, \quad L_0 < 1$

96. $xy = 1$ पर $u = 5$ के अधीन, आंशिक अवकल समीकरण

$x\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} = -xy$ for $x > 0$ पर विचारें। तो

1. जब $xy \le 19$ है तो $u(x, y)$ का अस्तित्व है तथा $x > 0, y > 0$ के लिए $u(x, y) = u(y, x)$ है।
2. जब $xy \ge 19$ है तो $u(x, y)$ का अस्तित्व है तथा $x > 0, y > 0$ के लिए $u(x, y) = u(y, x)$ है।
3. $u(1, 11) = 3,\ u(13, -1) = 7$
4. $u(1, -1) = 5,\ u(11, 1) = -5$

96. Consider the partial differential equation $x\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} = -xy$ for $x > 0$ subject to $u = 5$ on $xy = 1$. Then

1. $u(x, y)$ exists when $xy \le 19$ and $u(x, y) = u(y, x)$ for $x > 0, y > 0$
2. $u(x, y)$ exists when $xy \ge 19$ and $u(x, y) = u(y, x)$ for $x > 0, y > 0$
3. $u(1, 11) = 3,\ u(13, -1) = 7$
4. $u(1, -1) = 5,\ u(11, 1) = -5$

97. मानें कि $\mathbb{R}^2$पर एक एकक गोलक B है। मानें कि f तथा $a, C^2(\bar{B})$ में संतत फलन हैं।

$u \in C^2(\bar{B}), I(u) = \int_B (|\nabla u|^2 + fu)\, dx + \int_{\partial B} a\, u^2 ds$ का न्यूननकर्ता है। मानें कि $\vec{n}$ एकक बहिर्गामी लंब को निर्दिष्ट करता है। निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. $-2\,\Delta u + f = 0$ B में तथा $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + a\,u = 0$ ∂B पर
2. $-2\,\Delta u + f + a = 0$ B में तथा $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$ ∂B पर
3. $-\Delta u + f = 0$ B में तथा $2\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + a\,u = 0$ ∂B पर
4. $-\Delta u + 2f = 0$ B में तथा $2\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + a\,u = 0$ ∂B पर

97. Let B be the unit ball in $\mathbb{R}^2$. Let $u \in C^2(\bar{B})$ be a minimizer of

$$I(u) = \int_B (|\nabla u|^2 + fu)\, dx + \int_{\partial B} a\, u^2 ds$$

where f and a are continuous functions in $C^2(\bar{B})$. Let $\vec{n}$ denote the unit outward normal. Which of the following are correct?

1. $-2\,\Delta u + f = 0$ in B and $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + a\,u = 0$ on ∂B
2. $-2\,\Delta u + f + a = 0$ in B and $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$ on ∂B
3. $-\Delta u + f = 0$ in B and $2\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + a\,u = 0$ on ∂B
4. $-\Delta u + 2\,f = 0$ in B and $2\,\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + a\,u = 0$ on ∂B

98. मानें कि q_α तथा p_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ क्रमश: व्यापकीकृत निर्देशांक तथा व्यापकीकृत संवेग हैं। यदि H हैमिल्टनी को निर्दिष्ट करता है तथा q_α (कुछ $\alpha = \alpha_0$ के लिए) एक निरसनीय निर्देशांक है तो निम्न समीकरणों में से कौन-से समाधान पाते हैं?

1. $\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \quad \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \forall\, \alpha$
2. $\dot{p}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \quad \dot{q}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\ \forall\, \alpha$
3. $\dot{p}_{\alpha_0} = 0, \quad \dot{q}_{\alpha_0} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha_0}}$
4. $\dot{p}_{\alpha_0} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha_0}}, \quad \dot{q}_{\alpha_0} = 0$

98. Let q_α and p_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ be the generalized coordinates and the generalized momenta, respectively. If H denotes the Hamiltonian and q_α (for some $\alpha = \alpha_0$) is an ignorable coordinate, then which of the following equations are satisfied?

1. $\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \forall\, \alpha$
2. $\dot{p}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \quad \dot{q}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\ \forall\, \alpha$
3. $\dot{p}_{\alpha_0} = 0, \quad \dot{q}_{\alpha_0} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha_0}}$
4. $\dot{p}_{\alpha_0} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha_0}}, \quad \dot{q}_{\alpha_0} = 0$

99. किसी संरक्षी तंत्र के लिए, अंतिम विन्यास स्थिरित हैं तथा परिवर्तनीय गतिशीलता में गति ऐसी है कि $T + V = E$ है। यहां T, V तथा E क्रमश: निर्दिष्ट करते हैं गतिक ऊर्जा, विभव ऊर्जा तथा कुल ऊर्जा को । यदि चर A में अत्याणु परिवर्तन को $\delta(A)$ निर्दिष्ट करता है, तथा p_α तथा q_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ क्रमश: व्यापकीकृत संवेग तथा व्यापकीकृत निर्देशांकों को निर्दिष्ट करते हैं, तो

1. $\delta \int T\, dt = 0$
2. $\delta \int \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha dq_\alpha = 0$
3. $\delta \int \sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha dp_\alpha = 0$
4. $\delta \int \sum_{\alpha=1}^{n} (p_\alpha dq_\alpha + q_\alpha dp_\alpha) = 0$

99. For a conservative system, the end configurations are fixed and the velocity in the varied motion is such that $T + V = E$. Here T, V and E represent, respectively the kinetic energy, the potential energy and the total energy. If $\delta(A)$ denotes the infinitesimal change in a variable A, and p_α and q_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ represent the generalized momenta and generalized coordinates, respectively, then

1. $\delta \int T\, dt = 0$
2. $\delta \int \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha dq_\alpha = 0$
3. $\delta \int \sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha dp_\alpha = 0$
4. $\delta \int \sum_{\alpha=1}^{n} (p_\alpha dq_\alpha + q_\alpha dp_\alpha) = 0$

100. आंशिक अवकल समीकरण

$$x(p^2+q^2) = zp; \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

का संपूर्ण समाकल यदि वक्र $x = 0$, $z^2 = 4y$, से गुजरता है तो $x = 1$ तथा $y = 1$ से गुज़रते इस कुटुंब का अन्वालोप समाधान करता है:

1. $z = -2$
2. $z = 2$
3. $z = \sqrt{2+2\sqrt{2}}$
4. $z = -\sqrt{2+2\sqrt{2}}$

100. If a complete integral of the partial differential equation

$$x(p^2+q^2) = zp; \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

passes through the curve $x = 0$, $z^2 = 4y$, then the envelope of this family passing through $x = 1$ and $y = 1$ has

1. $z = -2$
2. $z = 2$
3. $z = \sqrt{2+2\sqrt{2}}$
4. $z = -\sqrt{2+2\sqrt{2}}$

101. एक अवकलनीय फलन $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ के लिए अंतर विभाग की परिभाषा करें कि

$$(D_x f)(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \; ; \;\; h > 0.$$

रूप $\hbar = h(1+\epsilon)$ की संख्याओं पर विचारें एक नियत $\epsilon > 0$ के लिए , तथा मानें कि

$e_1(h) = f'(x) - (D_x f)(h)$,

$e_2(h) = (D_x f)(h) - (D_x f)(\hbar)$,

$e(h) = e_1(h) + e_2(h)$.

यदि $f(x+\hbar) = f(x+h)$ है तो

1. $e_1(h) \to 0$ as $h \to 0$.
2. $e_2(h) \to 0$ as $h \to 0$.
3. $e_2(h) \to \epsilon f'(x)/(1+\epsilon)$ as $h \to 0$.
4. $e(h) \to 0$ as $h \to 0$.

101. For a differentiable function $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ define the difference quotient

$$(D_x f)(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \; ; \;\; h > 0.$$

Consider numbers of the form $\hbar = h(1+\epsilon)$ for a fixed $\epsilon > 0$ and let

$e_1(h) = f'(x) - (D_x f)(h)$,

$e_2(h) = (D_x f)(h) - (D_x f)(\hbar)$,

$e(h) = e_1(h) + e_2(h)$.

If $f(x+\hbar) = f(x+h)$, then

1. $e_1(h) \to 0$ as $h \to 0$.
2. $e_2(h) \to 0$ as $h \to 0$.
3. $e_2(h) \to \epsilon f'(x)/(1+\epsilon)$ as $h \to 0$.
4. $e(h) \to 0$ as $h \to 0$.

102. मानें कि $y_n = y_{n-1} + hy_{n-1}$ $(n = 1,2 \ldots, N)$ $y_0 = 1$ के साथ को y_n समाधान करता है तथा $0 < h < 1$ के लिए, $Nh = 1$. तो

1. $y_N \to e$ as $N \to \infty$
2. $y_N \to e^h$ as $N \to \infty$
3. $y_n = (1+h)^n$
4. $y_n \geq 1$

102. Let y_n satisfy $y_n = y_{n-1} + hy_{n-1}$ with $y_0 = 1$ $(n = 1,2 \ldots, N)$ and for $0 < h < 1$, $Nh = 1$. Then

1. $y_N \to e$ as $N \to \infty$
2. $y_N \to e^h$ as $N \to \infty$
3. $y_n = (1+h)^n$
4. $y_n \geq 1$

Unit-4

103. मानें कि $\{X_1, \ldots, X_n\}$ एक यादृच्छिक प्रदर्श है प्रायिकता घनत्व फलन

$f(x;\theta) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}; -\infty < x < \infty$ जहां $\theta \in \mathbb{R}$ है, से निकाला हुआ। निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1. θ का उच्चतम संभाविता आकलक $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ है।
2. θ के लिए $\sum_{i=1}^{n} X_i$ एक पर्याप्त प्रतिदर्शज है।
3. θ का उच्चतम संभाविता आकलक पर्याप्त प्रतिदर्शज का एक फलन है।
4. निम्न परीक्षण समस्या: $H_0: \theta = 0$ बनाम $H_1: \theta \neq 0$ के लिए एकसमानत: शक्ततम परीक्षण का अस्तित्व नहीं है।

103. Let $\{X_1, \ldots, X_n\}$ be a random sample from the probability density function

$f(x;\theta) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}; -\infty < x < \infty$ where $\theta \in \mathbb{R}$.

Which of the following statements are correct?

1. The maximum likelihood estimator of θ is $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
2. $\sum_{i=1}^{n} X_i$ is a sufficient statistic for θ
3. The maximum likelihood estimator of θ is a function of a sufficient statistic
4. There does not exist a *uniformly most powerful* test for the following testing problem: $H_0: \theta = 0$ vs $H_1: \theta \neq 0$

104. परीक्षण समस्या $H_0: \theta = 1$ बनाम $H_1: \theta = \frac{1}{2}$, जहां θ एक प्वासों यादृच्छिक चर का माध्य है, पर विचारें। मानें कि X तथा Y प्वासों (θ) बंटन से निकाले गये एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। निम्न परीक्षण कार्यविधि पर विचारें।

यदि $X = 0$ या $(X = 1$ तथा $X + Y \leq 2)$; है तो H_0 को अस्वीकार करें; अन्यथा H_0 को स्वीकार करें।

निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. P[प्रकार I त्रुटि] $= e^{-1} + 2e^{-2}$
2. P[प्रकार II त्रुटि] $= 1 - \frac{1}{2}e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}}$
3. परीक्षण का आमाप है $e^{-1} + e^{-2}$
4. परीक्षण की शक्ति है $\frac{3}{4}e^{-1} + e^{-\frac{1}{2}}$

104. Consider the problem of testing $H_0: \theta = 1$ vs $H_1: \theta = \frac{1}{2}$ where θ is the mean of a Poisson random variable. Let X and Y be a random sample from Poisson (θ) distribution. Consider the following test procedure:

Reject H_0 if either $X = 0$ or $(X = 1$ and $X + Y \leq 2)$; otherwise accept H_0.

Which of the following are true?

1. P[type I error] $= e^{-1} + 2e^{-2}$
2. P[type II error] $= 1 - \frac{1}{2}e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}}$
3. Size of the test is $e^{-1} + e^{-2}$
4. Power of the test is $\frac{3}{4}e^{-1} + e^{-\frac{1}{2}}$

105. मानें कि $\{X_1, \ldots, X_n\}$ एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है जो प्रायिकता घनत्व फलन $f(x)$ युक्त एक बंटन से प्राप्त है। संभाविता अनुपात परीक्षण (LRT) के उपयोग करते निम्न परीक्षण समस्या पर विचारें

H_0: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ बनाम

H_1: $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$

निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1. किसी भी LRT का अस्तित्व नहीं है।
2. अस्वीकारिता प्रांत $|X_1|, \ldots, |X_n|$ का एक फलन है।
3. अस्वीकारिता प्रांत $X_1^2, \ldots, X_n^2$ का एक फलन है।
4. अस्वीकारिता प्रांत इस रूप में हैं $\left\{\sum_{i=1}^{n} (|X_i| - 1)^2 \geq c\right\}$.

105. Suppose $\{X_1, \ldots, X_n\}$ is a random sample from the distribution with probability density function $f(x)$. Consider the following testing problem using likelihood ratio test (LRT).

H_0: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ vs

H_1: $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

Which of the following statements are correct?

1. There does not exist any LRT.
2. The rejection region is a function of $|X_1|, \ldots, |X_n|$.
3. The rejection region is a function of $X_1^2, \ldots, X_n^2$.
4. The rejection region is of the form $\{\sum_{i=1}^{n} (|X_i| - 1)^2 \geq c\}$.

106. मानें कि $c \in \mathbb{R}$ एक अचर है। मानें कि X, Y यादृच्छिक चर हैं, संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy, & \text{यदि } 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

के साथ। निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1. $c = \frac{1}{8}$
2. $c = 8$
3. X तथा Y स्वतंत्र हैं।
4. $P(X = Y) = 0$

106. Let $c \in \mathbb{R}$ be a constant. Let X, Y be random variables with joint probability density function

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy, & \text{if } 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Which of the following statements are correct?

1. $c = \frac{1}{8}$
2. $c = 8$
3. X and Y are independent
4. $P(X = Y) = 0$

107. मानें कि $\{X_n, n \geq 1\}$ स्व.स.बं. एकसमान $(-1, 2)$ यादृच्छिक चर हैं। निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to 0$ प्रायः निश्चिततः
2. $\left\{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_{2i} - \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_{2i-1}\right\} \to 0$ प्रायः निश्चिततः
3. $\sup\{X_1, X_2, \ldots\} = 2$ प्रायः निश्चिततः
4. $\inf\{X_1, X_2, \ldots\} = -1$ प्रायः निश्चिततः

107. Let $\{X_n, n \geq 1\}$ be i.i.d. uniform $(-1, 2)$ random variables. Which of the following statements are true?

1. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to 0$ almost surely
2. $\left\{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_{2i} - \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_{2i-1}\right\} \to 0$ almost surely
3. $\sup\{X_1, X_2, \ldots\} = 2$ almost surely
4. $\inf\{X_1, X_2, \ldots\} = -1$ almost surely

108. मानें कि $\{X_n\}$ एक मार्कोव शृंखला है $\{0,1,2, \ldots\}$ पर, और

$P_{00} = \frac{2}{3}, P_{01} = \frac{1}{3}, P_{i,i+1} = \frac{2}{3}, P_{i,i-1} = \frac{1}{3},$
$i \geq 1, P_{ij} = 0$ अन्यथा।

निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1. $\{X_n\}$ पुनरावर्ती है।
2. $\{X_n\}$ क्षणिक है।
3. $P(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) > 0$
4. $P(\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty) > 0$

108. Let $\{X_n\}$ be a Markov chain on $\{0,1,2,\ldots\}$ with

$P_{00} = \frac{2}{3}, P_{01} = \frac{1}{3}, P_{i,i+1} = \frac{2}{3}, P_{i,i-1} = \frac{1}{3},$
$i \geq 1, P_{ij} = 0$ otherwise.

Which of the following statements are correct?

1. $\{X_n\}$ is recurrent
2. $\{X_n\}$ is transient
3. $P(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) > 0$
4. $P(\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty) > 0$

109. निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1. एक परिमित अवस्था मार्कोव शृंखला की कम-से-कम एक क्षणिक अवस्था है।
2. एक परिमित अवस्था मार्कोव शृंखला की कम-से-कम एक स्तंब्ध बंटन है।
3. एक गणनीय अवस्था मार्कोव शृंखला के लिए हर अवस्था क्षणिक हो सकती है।
4. एक अनावर्ती गणनीय अवस्था मार्कोव शृंखला का कम-से-कम एक स्तब्ध बंटन है।

109. Which of the following statements are correct?

1. For a finite state Markov chain there is at least one transient state.
2. For a finite state Markov chain there is at least one stationary distribution.
3. For a countable state Markov chain, every state can be transient.
4. For an aperiodic countable state Markov chain there is at least one stationary distribution.

110. मानें कि X प्राचल $\lambda > 0$ युक्त एक चरघातांकी बंटन का अनुसरण करता है। $a > 0$ स्थित रखें। यादृच्छिक चर Y को परिभाषित करें कि

$Y = k$, यदि $ka \leq X < (k+1)a$,

$k = 0,1,2,\ldots$

निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1. $P(4 < Y < 5) = 0$
2. Y एक चरघातांकी बंटन का अनुसरण करता है।
3. Y एक गुणोत्तर बंटन का अनुसरण करता है।
4. Y एक प्वासों बंटन का अनुसरण करता है।

110. Suppose X follows an exponential distribution with parameter $\lambda > 0$. Fix $a > 0$. Define the random variable Y by

$Y = k$, if $ka \leq X < (k+1)a$,

$k = 0,1,2,\ldots$

Which of the following statements are correct?

1. $P(4 < Y < 5) = 0$
2. Y follows an exponential distribution
3. Y follows a geometric distribution
4. Y follows a Poisson distribution

111. आमाप N की एक परिमित समष्टि पर विचारें। साधारण प्रतिस्थापन सहित प्रतियचन प्रणाली ($SRSWR$) के अंतर्गत मानें कि आमाप n के प्रतिदर्श के आधार पर, प्रतिदर्श माध्य T_1है। स्तरित यादृच्छिक प्रतिदर्श n के आधार पर, जहां प्रतिदर्श 4 स्तरों में प्रत्येक से $SRSWR$ प्रणाली द्वारा अनुपाती नियतन के अंतर्गत निकाले जाते हैं, मानें कि प्रतिदर्श माध्य T_2 है। तो प्रसरण(T_1) = प्रसरण(T_2) के समाधान हेतु निम्न में से उपयुक्त प्रतिबंध कौन-से हैं?

1. स्तर आमाप समान हैं।
2. स्तर योगफल समान हैं।
3. स्तर माध्य समान हैं।
4. स्तर प्रसरण समान हैं।

111. Consider a finite population of size N. Let T_1 be the sample mean based on a sample of size n under simple random sampling with replacement (SRSWR) scheme. Let T_2 be the sample mean based on a stratified random sample of size n where the samples are drawn from each of 4 strata using SRSWR scheme under proportional allocation. Then which of the following are sufficient conditions for $\mathrm{Var}(T_1) = \mathrm{Var}(T_2)$ to hold?

1. Strata sizes are same
2. Strata totals are same
3. Strata means are same
4. Strata variances are same

112. प्राचल b, v, r, k, λ युक्त एक संतुलित अपूर्ण खंड अभिकल्पना ($BIBD$) पर विचारें, जहां v उपचारों के एक समुच्चय में से b खंडों में प्रत्येक के k उपचार हैं, अभिकल्पना में प्रत्येक उपचार r बार होता है, तथा उपचार की हर जोड़ी λ बार घटित होती है। प्रत्येक खंड में सभी उपचारों को उसके अपने पूरक समुच्चय से प्रतिस्थापित करके एक नयी अभिकल्पना बनायी जाती है। तो नयी अभिकल्पना के लिए निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. वह एक $BIBD$ है।
2. प्रत्येक उपचार $(b - r)$ बार होता है।
3. उपचार की प्रत्येक जोड़ी एक ही खंड में $(b - r + \lambda)$ बार होता है।
4. $bk = vr$

112. Consider a balanced incomplete block design (BIBD) with parameters b, v, r, k, λ where each of the b blocks contains k treatments out of a set of v treatments, each treatment occurs r times in the design and each pair of treatments occurs λ times. A new design is formed by replacing all the treatments in each block by its complementary set. Then which of the following are true for the new design?

1. It is a BIBD
2. Each treatment occurs $(b - r)$ times
3. Each pair of treatments appears in the same block $(b - r + \lambda)$ number of times
4. $bk = vr$

113. मानें कि यादृच्छिक चर X निम्न प्रायिकता घनत्व फलन रखता है:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(x-\mu)^{\alpha-1}e^{-(x-\mu)^{\alpha}}; & x > \mu \\ 0 & x \le \mu, \end{cases}$$

जहां $\alpha > 0, -\infty < \mu < \infty$ है। निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं? X का जोखिम फलन

1. सभी $\alpha > 0$ के लिए एक वर्धमान फलन है।
2. सभी $\alpha > 0$ के लिए एक ह्रासमान फलन है।
3. कुछ $\alpha > 0$ के लिए एक वर्धमान फलन है।
4. कुछ $\alpha > 0$ के लिए एक ह्रासमान फलन है।

113. Suppose the random variable X has the following probability density function

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(x-\mu)^{\alpha-1}e^{-(x-\mu)^{\alpha}}; & x > \mu \\ 0 & x \le \mu, \end{cases}$$

where $\alpha > 0, -\infty < \mu < \infty$. Which of the following statements are correct? The hazard function of X is

1. an increasing function for all $\alpha > 0$
2. a decreasing function for all $\alpha > 0$
3. an increasing function for some $\alpha > 0$
4. a decreasing function for some $\alpha > 0$

114. इस समस्या पर विचारें:

$2y_1 + 3y_2 + 5y_3 + 4y_4$ को $y_1 + y_2 \le 1$,

$y_2 + y_3 \le 1, y_3 + y_4 \le 1, y_4 + y_1 \le 1$

तथा $y_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4$

के अधीन अधिकतमीकृत करें। इष्टतम मान है

1. 8 के समान
2. 8 तथा 9 के बीच
3. 7 के समान या उससे अधिक
4. 7 के समान या उससे कम

114. Consider the problem:

Maximize $2y_1 + 3y_2 + 5y_3 + 4y_4$

subject to

$y_1 + y_2 \le 1, y_2 + y_3 \le 1, y_3 + y_4 \le 1,$

$y_4 + y_1 \le 1$ and $y_i \ge 0$ for $i = 1,2,3,4$.

Then the optimum value is

1. equal to 8
2. between 8 and 9
3. greater than or equal to 7
4. less than or equal to 7

115. मानें कि $(x_1, x_2, x_3, x_4), x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ की न्यूनीकरण समस्या का हल है, व्यवरोधों

$x_1 + x_2 \ge 300$
$x_2 + x_3 \ge 500$

$x_3 + x_4 \ge 400$

$x_4 + x_1 \ge 200$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$ के अधीन।

किसी भी x_i के लिए निम्न में से कौन-से संभाव्य मान **नहीं** हैं?

1. 300
2. 400
3. 500
4. 600

115. Let (x_1, x_2, x_3, x_4) be an optimal solution to the problem of minimizing

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

subject to the constraints

$x_1 + x_2 \geq 300$

$x_2 + x_3 \geq 500$

$x_3 + x_4 \geq 400$

$x_4 + x_1 \geq 200$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.

Which of the following are **not** possible values for any x_i?

1. 300
2. 400
3. 500
4. 600

116. मानें कि $X_1, X_2, \dots, X_7$ स्व.स.बं. यादृच्छिक चर हैं, जिनका आम संतत बंटन फलन $F(x-\theta_1)$ है तथा $Y_1, Y_2, \dots, Y_7$ स्व.स.बं. यादृच्छिक चर है जिनका आम संतत बंटन फलन $F(y-\theta_2)$ है। परीक्षण समस्या $H_0: \theta_1 = \theta_2$ बनाम $H_1: \theta_1 > \theta_2$ पर विचारें। मानें कि $X_1, X_2, \dots, X_7, Y_1, Y_2, \dots, Y_7$ की कोटियां क्रमशः $R_1, R_2, \dots R_7, R_8, R_9, \dots, R_{14}$ हैं। परिभाषित करें कि

$$T_1 = \sum_{i=1}^{7} R_i \ \text{ तथा } T_2 = \sum_{j=8}^{14} R_j$$

निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1. H_0 के अधीन $E(T_1) = E(T_2)$
2. H_0 के अधीन $E(T_1) = 52.5$
3. T_2 27 हो नहीं सकता
4. यदि हम T_1 के आधार पर दक्षिण-पृच्छ परीक्षण का उपयोग करेंगे तो प्रेक्षित मान $T_1 = 77$, सार्थकता स्तर 5% पर सार्थक है।

116. Let $X_1, X_2, \dots, X_7$ be i.i.d. random variables with common continuous distribution function $F(x-\theta_1)$ and let $Y_1, Y_2, \dots, Y_7$ be i.i.d. random variables with common continuous distribution function $F(y-\theta_2)$. Consider the problem of testing

$$H_0: \theta_1 = \theta_2 \text{ vs } H_1: \theta_1 > \theta_2.$$

Let $R_1, R_2, \dots R_7, R_8, R_9, \dots, R_{14}$ be the ranks of $X_1, X_2, \dots, X_7, Y_1, Y_2, \dots, Y_7$, respectively in the combined sample. Define

$$T_1 = \sum_{i=1}^{7} R_i \ \text{ and } \ T_2 = \sum_{j=8}^{14} R_j.$$

Which of the following statements are true?

1. $E(T_1) = E(T_2)$ under H_0
2. $E(T_1) = 52.5$ under H_0
3. T_2 cannot be 27
4. If we use right-tailed test based on T_1, then the observed value $T_1 = 77$ is significant at 5% level of significance.

117. एक फुटबॉल लीग में घरेलू पक्ष से 380 मैचों में स्कोर किये गये गोलों का निम्न बारंबारिता बंटन है:

गोलों की संख्या	0	1	2	3	4	5
बारंबारिता	92	121	91	50	19	7

घरेलू पक्ष द्वारा स्कोर किये गये गोलों का माध्य 1.49 है। हम यह परीक्षण करना चाहते हैं कि H_0: गोलों का बंटन प्वासों है।

प्रेक्षणों के आधार पर समंजन सुष्ठुता के लिए χ^2-प्रतिदर्शज का मान 1.27 है। इसके दिये जाने पर कि

$\chi^2_{0.05,6} = 1.64$, $\chi^2_{0.05,5} = 1.15, \chi^2_{0.95,6} = 12.59$ and $\chi^2_{0.95,5} = 11.07$,

निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. सार्थकता स्तर 5% पर H_0अस्वीकार नहीं किया जाता।
2. χ^2 –प्रतिदर्शज की स्वतंत्रता कोटि 5 है।
3. H_0 के अधीन प्वासों के गति-प्राचल का उच्चतम संभाविता आकलक (MLE) 1.49 है।
4. H_0 के अधीन, किसी गैम में घरेलू पक्ष अधिक से अधिक एक गोल स्कोर कर पायेगा, इसकी प्रायिकता का MLE $2.49e^{-1.49}$ है।

117. In a football league, the goals scored by home teams over 380 matches have the following frequency distribution.

Number of goals	0	1	2	3	4	5
Frequency	92	121	91	50	19	7

The average goals scored by home teams is 1.49. We want to test

H_0: Goal distribution is Poisson.

Based on observations the value of the χ^2-statistic for goodness of fit is 1.27. Given $\chi^2_{0.05,6} = 1.64$, $\chi^2_{0.05,5} = 1.15, \chi^2_{0.95,6} = 12.59$

and $\chi^2_{0.95,5} = 11.07$, which of the following are true?

1. H_0 is not rejected at 5% level of significance.
2. χ^2-statistic has 5 degrees of freedom
3. Under H_0, the maximum likelihood estimate (MLE) of the rate parameter of Poisson is 1.49
4. Under H_0, in a game, the MLE of the probability that home team will score at most one goal is $2.49e^{-1.49}$

118. प्रतिमान $Y = X\beta + \epsilon$ पर विचारें, जहां

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},\ X = \left((x_{ij})\right)_{n\times p} \text{ तथा}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix},\quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix} \text{ हैं।}$$

$E(\epsilon) = 0$ तथा $D(\epsilon) = \sigma^2 I_n, p < n$.

मानें कि $X^TX\beta = X^TY$ का हल $\hat{\beta}$ है। निम्न में से कौन-से सही हैं?

1. यदि $C^T\beta$ आकलनीय है, तो $C^T\beta$ का श्रेष्ठतम रैखिक अनभिनत आकलक ($BLUE$) $C^T\hat{\beta}$ है।
2. यदि तथा मात्र यदि जाति$(X) > p$ है तो सभी रैखिक प्राचलीय फलन आकलनीय हैं।
3. यदि जाति $(X) < p$ है तो कुछ रैखिक प्राचलीय फलन आकलनीय नहीं हैं।
4. σ^2 का अनभिनत आकलक $(Y - X\hat{\beta})^T(Y - X\hat{\beta})/(n-p)$ है।

118. Consider the model $Y = X\beta + \epsilon$,

$$\text{where } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},\ X = \left((x_{ij})\right)_{n\times p} \text{ and}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix},\quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}.$$

$E(\epsilon) = 0$ and $D(\epsilon) = \sigma^2 I_n, p < n$.

Let $\hat{\beta}$ be the solution of $X^TX\beta = X^TY$. Which of the following are true?

1. If $C^T\beta$ is estimable then $C^T\hat{\beta}$ is the best linear unbiased estimator (BLUE) of $C^T\beta$
2. All linear parametric functions are estimable if and only if Rank $(X) > p$.
3. If Rank$(X) < p$ then some linear parametric functions are not estimable.
4. $(Y - X\hat{\beta})^T(Y - X\hat{\beta})/(n-p)$ is an unbiased estimator of σ^2.

119. मानें कि X_1 तथा X_2 स्वतंत्र यादृच्छिक चर है जिनमें से प्रत्येक का $N(\mu, \sigma^2)$ बंटन है, जहां $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ है। मानें कि $0 \le \theta < 2\pi$ तथा $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. मानें कि $\underline{Y} = (Y_1, Y_2)^t = A\underline{X}$, $\underline{X} = (X_1, X_2)^t$ के साथ। निम्न कथनों में से कौन-से सही हैं?

1. $\underline{Y} = \underline{X}$ बंटन में, यदि तथा मात्र यदि $\mu = 0$ है।
2. $\underline{Y} = \underline{X}$ बंटन में, यदि तथा मात्र यदि $\mu = 0, \theta = 0$ हैं।
3. Y_1 तथा Y_2 गाऊसियन हैं।
4. Y_1 तथा Y_2 सहसंबंधित हो सकते हैं।

119. Let X_1 and X_2 be independent random variables each having $N(\mu, \sigma^2)$ distribution, where $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$. Let $0 \leq \theta < 2\pi$ and $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Put $\underline{Y} = (Y_1, Y_2)^t = A\underline{X}$ with $\underline{X} = (X_1, X_2)^t$. Which of the following statements are correct?

1. $\underline{Y} = \underline{X}$ in distribution if and only if $\mu = 0$.
2. $\underline{Y} = \underline{X}$ in distribution if and only if $\mu = 0,\ \theta = 0$.
3. Y_1 and Y_2 are Gaussian.
4. Y_1 and Y_2 may be correlated.

120. मानें कि X_1 तथा X_2 दो स्व.स.बं. $N_p(0, \Sigma)$ यादृच्छिक चर है, जाति $(\Sigma) = p$ के साथ। मानें कि A एक $p \times p$ सममित आव्यूह है जाति r के साथ, तथा $A^2 = A$ है। निम्न कथनों में कौन-से सही हैं?

1. $X_1^T A X_1 \sim \chi_r^2$
2. $X_1^T A X_1 + X_2^T A X_2 \sim 2\chi_r^2$
3. $X_1^T A X_2 + X_2^T A X_1 \sim 2\chi_r^2$
4. $X_1^T A X_1 + X_2^T A X_2 \sim \chi_{2r}^2$

120. Let X_1 and X_2 be two i.i.d. $N_p(0, \Sigma)$ random variables with $\text{rank}(\Sigma) = p$. Suppose A is a $p \times p$ symmetric matrix of rank r, and $A^2 = A$. Which of the following statements are correct?

1. $X_1^T A X_1 \sim \chi_r^2$
2. $X_1^T A X_1 + X_2^T A X_2 \sim 2\chi_r^2$
3. $X_1^T A X_2 + X_2^T A X_1 \sim 2\chi_r^2$
4. $X_1^T A X_1 + X_2^T A X_2 \sim \chi_{2r}^2$

FOR ROUGH WORK