[This question paper contains 06 printed pages]

Roll Number: ______________

HPAS (Main) Examination-2018

STATISTICS-I

Time: 3 Hours | Maximum Marks: 100

निर्धारित समय : तीन घंटे | अधिकतम अंक: 100

Note:

1. This question paper contains eight questions. Attempt total five questions including question No.1 which is compulsory.
2. Each question carries equal marks. Marks are divided and indicated against each part of the question.
3. Write legibly. Each part of the question must be answered in sequence in the same continuation.
4. If questions are attempted in excess of the prescribed number only questions attempted first up to the prescribed number shall be valued and the remaining answers will be ignored.

ध्यान दें :

1. इस प्रश्न पत्र में आठ प्रश्न हैं। प्रश्न संख्या 1 (जो अनिवार्य है) सहित कुल पांच प्रश्नों के उत्तर लिखिए।
2. प्रत्येक प्रश्न के समान अंक हैं। अंको को प्रश्न के प्रत्येक भाग के विरुद्ध विभाजित और इंगित किया गया है।
3. स्पष्ट रूप से लिखें। प्रश्न के प्रत्येक भाग को उसी क्रम में क्रम से उत्तर दिया जाना चाहिए।
4. यदि प्रश्नों को निर्धारित संख्या से अधिक करने का प्रयास किया जाता है, तो केवल निर्धारित संख्या तक पहले किए गए प्रश्नों का मूल्यांकन किया जाएगा और शेष उत्तरों को नजरअंदाज किया जाएगा।

1. (a) Suppose that the population consists of all equally likely points (x, y) both of whose coordinates are integers and which lie inside or on the boundary of the square bounded by the lines x = 0, y = 0, x = 6, and y = 6. Obtain Probability of following events. (08)

(i) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 6\}$,
(ii) $B = \{(x, y) \mid y \leq x^2\}$,
(iii)AUB.

मान लीजिए कि समष्टि में समान रूप से संभावित सभी बिंदु (x, y) हैं, जिनके दोनों निर्देशांक पूर्णांक हैं और जो रेखाओं x = 0, y = 0, x = 6 और y = 6 से बंधे वर्ग की सीमा पर या अंदर हैं। निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात करें.

(i) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 6\}$,
(ii) $B = \{(x, y) \mid y \leq x^2\}$,
(iii)AUB.

(b) Let $A_1, A_2, \ldots, A_n$ are n events of a random experiment. Show that: (06)

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

मान लें कि $A_1, A_2, \ldots, A_n$ एक यादृच्छिक प्रयोग की n घटनाएं हैं। दिखाइए कि

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(c) Define conditional probability. A fair die is tossed, and if it comes up j ($1 \leq j \leq 6$) then j fair coins are tossed. What is probability of getting more than three heads in second part of the experiment? (06)

प्रतिबंधित प्रायिकता को परिभाषित कीजिये. एक अनभिनत पासा फेका जाता है और अगर ऊपर j ($1 \leq j \leq 6$) आता है तो j अनभिनत सिक्के फेंके जाते हैं। प्रयोग के दूसरे भाग में तीन से अधिक शीर्ष आने की प्रायिकता क्या है ?

2. (a) Following table gives per day milk production of each buffalo of a dairy farm according to their age groups. (10)

| Age of buffalo (in years) | 5 – 7 | 7 – 9 | 9 – 11 | 11 – 13 | 13 – 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| Milk production (in litres) | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 |

There are thirty buffaloes in a dairy farm having ages 13, 10, 7, 13, 11, 9, 12,10, 9, 5, 7, 11, 8, 6, 10, 6 ,9, 10, 13, 13, 12, 13, 10, 12, 9, 7, 10, 8, 13, and 5 years. Find mean production of milk per day in dairy farm with standard deviation.

निम्नलिखित तालिका में एक डेयरी फार्म के प्रत्येक भैंस के प्रतिदिन दूध उत्पादन का विवरण उनके आयु वर्ग के अनुसार दिया गया है।

| भैंस की आयु (वर्ष में) | 5 – 7 | 7 – 9 | 9 – 11 | 11 – 13 | 13 – 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| दूध उत्पादन (लीटर में) | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 |

डेयरी फॉर्म में 13, 10, 7, 13, 11, 9, 12,10, 9, 5, 7, 11, 8, 6, 10, 6, 9, 10, 13, 13, 12, 13, 10, 12, 9, 7, 10, 8, 13, और साल 5 के उम्र वाली तीस भैंस हैं । डेयरी फॉर्म में प्रति दिन दूध उत्पादन का औसत एवं मानक विचलन ज्ञात करें।

(b) Comment on similarities of binomial distribution and hyper-geometric distribution. Obtain moment generating function of binomial distribution. If

$$E(X^r) = 0.6, if\ r = 1,2,3, \dots$$

then find the ratio of P(X=0) to P(X=1). (10)

द्विपद बंटन और हाइपर-ज्यामितीय बंटन की समानता पर टिप्पणी करें। द्विपद बंटन का आघूर्ण जनक फलन प्राप्त करें। यदि

$$E(X^r) = 0.6, \text{यदि}\ r = 1,2,3, \dots$$

हो तो P(X=0) का P(X=1) से अनुपात ज्ञात कीजिये ।

3. (a) Define Bernoulli experiment. Write name of three probability distributions which are obtained by repetition of independent Bernoulli experiments. If X~b(n,p) then show that the recurrence relation for moment of distribution is: (10)

$$\mu_{r+1} = pq\left(nr\mu_{r-1} + \frac{d}{dp}\mu_r\right)$$

बर्नौली प्रयोग को परिभाषित करें। तीन प्रायिकता बंटनों के नाम लिखें जो स्वतंत्र बर्नौली प्रयोगों की पुनरावृत्ति द्वारा प्राप्त किए जाते हैं। यदि X ~ b (n, p) तो यह दिखाएं कि बंटन के आघूर्ण के लिए पुनरावृत्ति संबंध है:

$$\mu_{r+1} = pq(nr\mu_{r-1} + \frac{d}{dp}\mu_r)$$

(b) Show that in case of two variables X and Y, the acute angle θ between two regression lines is (10)

$$\tan\theta = \frac{1 - r^2}{|r|}\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$$

Let 2Y-X+3=0 is regression line Y on X and its angle with regression line X on Y is $45^0$. Obtain coefficient of correlation r between X and Y.

दो चरों X और Y के समाश्रयण रेखाओं के बीच न्यून कोण θ हो तो दिखाइए कि

$$\tan\theta = \frac{1 - r^2}{|r|}\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$$

मान लें कि 2Y-X+3=0, Y पर X की समाश्रयण रेखा है और इसका X पर Y की समाश्रयण रेखा से कोण $45^0$ है। X और Y के बीच सहसंबंध गुणांक r प्राप्त कीजिये।

4. (a) Obtain moment generating function of normal distribution having mean μ and variance $\sigma^2$. Let moment generating function of a random variable X is $e^{2t(1+t)}$. Show that P(0≤X≤4)= $2F(1) - 1$ where $F(.)$ is distribution function of standard normal distribution. (10)

माध्य μ और प्रसरण $\sigma^2$ वाले प्रसामान्य बंटन का आघूर्ण जनक फलन प्राप्त कीजिये। मान लें कि एक यादृच्छिक चर X का आघूर्ण जनक फलन $e^{2t(1+t)}$ है। दिखाइए कि P(0≤X≤4)= $2F(1) - 1$ जहाँ $F(.)$ मानकी कृत प्रसामान्य बंटन का बंटन फलन है।

(b) Define covariance. Show that covariance (Cov) of two random variables is independent by change of origin but not by scale. Let random variables X, Y and Z have the means 5, 7 and 4 along with variances 10, 14 and 20 respectively. If Cov(XY) = 1, Cov(XZ) = - 3 and Cov(YZ) = 2, then obtain the covariance of U = X + 4Y + 2Z and V = 3X –Y-Z. (10)

सहप्रसरण को परिभाषित कीजिये। दिखाइए कि सहप्रसरण (Cov) मूल परिवर्तन से स्वतंत्र होता है लेकिन पैमाने से नहीं। मान लें कि यादृच्छिक चरों X, Y और Z का माध्य 5, 7 और 4 एवं प्रसरण क्रमशः 10, 14 और 20 हैं। यदि Cov (XY) = 1, Cov (XZ) = - 3 और Cov (YZ) = 2, तब U = X + 4Y + 2Z और V = 3X –Y-Z का सहप्रसरण प्राप्त करें।

5. (a) State and prove Baye's theorem. Let there are two boxes with two drawers in each. First box has a gold coin in one drawer and a silver coin in the other drawer, while second box has a gold coin in each drawer. A box was selected randomly and then a drawer of selected box was chosen at random. If from selected drawer a coin is drawn randomly and it is found to be gold then find probability that this coin was came from box two. (10)

बेज के प्रमेय को व्याख्या करते हुए सिद्ध कीजिये। मान लें कि दो बॉक्स है एवं प्रत्येक बॉक्स में दो दराज हैं। पहले बॉक्स में एक दराज में एक सोने का सिक्का और दूसरे दराज में एक चांदी का सिक्का है, जबकि दूसरे बॉक्स में प्रत्येक दराज में एक सोने का सिक्का है। एक बॉक्स को यादृच्छिक रूप से चुना गया था और फिर चयनित बॉक्स के एक दराज को यादृच्छिक पर चुना गया था। यदि चयनित दराज से एक सिक्का यादृच्छिक ढंग से निकला जाता है और यह सोना पाया जाता है, तो प्रायिकता खोजें कि यह सिक्का बॉक्स दो से आया था।

(b) Let X and Y are two independent random variables with (10)

$$p_X(x) = \frac{1}{3}, x = 0,1,2 \ and$$
$$p_Y(y) = k, \ if \ y = -1,1$$

where k is a constant. Obtain probability distribution of following random variables.

(i) X+Y

(ii) min(X,Y)

(iii) Z=max(X,Y)-min(X,Y).

मान लें कि X और Y दो स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं तथा

$$p_X(x) = \frac{1}{3}, x = 0,1,2 \quad \text{और}$$
$$p_Y(y) = k, \quad if\ y = -1,1$$

जहाँ k एक नियतांक है। निम्न यादृच्छिक चरों का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिये।

(i) X+Y

(ii) min(X,Y)

(iii) Z=max(X,Y)-min(X,Y)

6. (a) Let joint probability density function of two dimensional random variable (X,Y) is

$$f(X,Y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)} & if\ x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

Obtain the probability distribution of random variable Z=$\sqrt{X^2+Y^2}$. (10)

मान लें कि दो आयामी यादृच्छिक चर (X,Y) का संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन

$$f(X,Y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)} & \text{यदि } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

है। यादृच्छिक चर Z=$\sqrt{X^2+Y^2}$ का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिये।

(b) If X and Y are two independent variables having chi square distribution with $n_1$and $n_2$ degree of freedom respectively then show that

$$T = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$$

is distributed as F distribution. (10)

यदि X और Y दो स्वतंत्र चर हैं जो क्रमशः $n_1$ और $n_2$ स्वातंत्र्य स्तर के साथ काई वर्ग बंटन रखते है तो दिखाइए कि

$$T = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$$

F बंटन के रूप में बंटित होगा।

7. (a) Explain moment method of estimation. Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ are random sample from normal population with mean μ and variance $\sigma^2$, where both are unknown. Find moment estimators of μ and $\sigma^2$. Obtain also the sampling distribution of moment estimator of μ. (10)

आकलन की आघूर्ण विधि बताएं। मान लें कि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ माध्य μ और प्रसरण $\sigma^2$ वाले प्रसामान्य बंटन से यादृच्छिक प्रतिदर्श है जहाँ दोनों अज्ञात हैं । μ और $\sigma^2$ का आघूर्ण आकलक प्राप्त कीजिये। μ के आघूर्ण आकलक का प्रतिदर्श बंटन भी ज्ञात कीजिये।

(b) Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ are random sample from exponential distribution with mean θ ($0 < \theta < \infty$). Show that sample mean is minimum variance bound (MVB) estimator of θ having variance $\frac{\theta^2}{n}$. (10)

मान लें कि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ माध्य θ ($0 < \theta < \infty$) के साथ घातीय बंटन से यादृच्छिक प्रतिदर्श है। दिखाइए कि θ का न्यूनतम प्रसरण प्रतिबन्ध (MVB) आकलक, प्रसरण $\frac{\theta^2}{n}$ के साथ, प्रतिदर्श माध्य है।

8. (a) Explain properties of a good estimator. Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ are identically independently distributed random variables with $E(X_i) = \mu$ and $E|X_i|^2 < \infty$. Show that $T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} iX_i$ is consistent estimator of μ.

(10)

एक अच्छे आकलक के गुणों को समझाइए। मान लें कि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ एक समान, स्वतंत्र रूप से बंटित यादृच्छिक चर हैं जिनके लिए दिया है कि $E(X_i) = \mu$ और $E|X_i|^2 < \infty$। दिखाइए कि $T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} iX_i$ μ का संगत आकलक है।

(b) Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ are random sample from normal population with mean μ and variance $\sigma^2$. Obtain (1-α) level confidence intervals for μ considering σ as known and unknown. (10)

मान लें कि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ माध्य μ और प्रसरण $\sigma^2$ वाले प्रसामान्य बंटन से यादृच्छिक प्रतिदर्श है। σ को ज्ञात और अज्ञात मानते हुए μ के (1-α) स्तर विश्वास अंतरालों को प्राप्त कीजिये।